161 Eng

SEAT No.________

No. of Printed Pages : 2

SARDAR PATEL UNIVERSITY
SEM II , MATHEMATICS
PAPER US02CMTH21
BSc - II SEM

Time:3 Hours **Total Marks: 70**

Date : 29-03-2019 , Friday **Time : 2-00 to 5-00** PM

1. Answer the following by selecting correct choice from the options : **[10]**

(1) Amplitude of $-\sqrt{3}+i$ is _____
(a) 60° (b) 150°
(c) 30° (d) 120°

(2) If $z = 2 + 3i$, then $z\bar{z} =$ _________
(a) 13 (b) $\sqrt{13}$
(c) 5 (d) $\sqrt{5}$

(3) $(1+i)^4 =$ ________
(a) $4i$ (b) $-4i$
(c) -4 (d) $1+i$

(4) A square matrix A is said to be Skew Hermitian if _______
(a) $A = -A^\theta$ (b) $A = -A^T$
(c) $A = A^\theta$ (d) $A = A^T$

(5) The matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ is ______Matrix.
(a) Identity (b) Zero
(c) Row (d) Column

(6) For any square matrix A, The matrix $A - A'$ is a __________
(a) symmetric (b) skew symmetric
(c) Hermitian (d) skew Hermitian

(7) If I_3 is identity matrix of order 3 then $(I_3)^{-1} =$ _____
(a) 0 (b) $3I_3$
(c) I_3 (d) not necessarily exist

(8) With $1, \omega, \omega^2$ as cube roots of unity, inverse of which of the following matrices exist?
(a) $\begin{bmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \omega^2 & 1 \\ 1 & \omega \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega \end{bmatrix}$ (d) None of these

(9) If $\lambda = 4$ is one eigen value of A then the eigen value of $A + 2I$ is ____
(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

(10) A Cayley-Hamilton theorem holds for ______matrices only.
(a) singular (b) all square
(c) null (d) a few rectangular

2. Answer any TEN of the following. **[20]**

1) Express the complex number $1 + i$ in polar form.
2) Prove that $\tan ix = i \tanh x$.
3) Prove that $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
4) Let $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ and the function $f : A \to N$ is defined by $f(x) = x^2 + 1$. Find the range of f.
5) If $f : R \to R$ is defined by $f(x) = |x|$ then prove that $fof = f$.
6) Define an Equivalence relation.
7) Prove that If the inverse of a matrix exists, then it is always unique.

(P.T.O)

8) Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

9) Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ is idempotent.

10) If matrix A is nonsingular, prove that the eigen values of A^{-1} are the reciprocals of the eigen values of A.

11) Find the eigen values of the matrix $\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$.

12) Write the condition of consistency of system of linear equations.

3. (a) Prove that $(cos\theta + isin\theta)^n = cos\, n\theta + isin\, n\theta, \forall\, n \in Q$. [6]
(b) Solve the equation $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ [4]

OR

3. (a) Separate $log\, sin(x + iy)$ into real and imaginary parts. [5]
(b) Expand $cos^8\theta$ in a series of cosine of multiples of θ. [5]

4. (a) Let $f : R \to R$ defined by $f(x) = 5x + 7, x \in R$. Prove that f is invertible and find f^{-1}. [5]
(b) Prove that the relation 'congruence modulo m' on the set Z of all integers is an equivalence relation. [5]

OR

4. (a) If A and B are matrices of order $m \times n$ and $n \times p$ respectively, then prove that $(AB)' = B'A'$. [5]
(b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ then find out the values of α and β such that $(\alpha I + \beta A)^2 = A$. [5]

5. (a) Use Gauss-Jordan method to find A^{-1} for $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ [5]
(b) If A is a matrix of order $m \times n$ and R is a non-singular matrix of order m then show that $\rho(RA) = \rho(A)$. [5]

OR

5. (a) Let $AX = B$ be a system of linear equations, where A is a square coefficient matrix. [5]
Prove that (i) If A is nonsingular then the system has a unique solution $X = A^{-1}B$.
(ii) If A is singular then the system has no solutions or infinite number of solutions.

(b) Solve the following system using inverse of the coefficient matrix. [5]
$4x + 2y - z = 9,\ x - y + 3z = -4,\ 2x + z = 1$

6. (a) State and prove Cayley-Hamilton theorem. [5]
(b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ and hence find A^{-1}. [5]

OR

6. (a) Prove that the modulus of characteristic root of a unitary matrix is unity. [5]
(b) Solve the following system of equations by Gauss elimination method. [5]
$4x + 2y - z = 9,\ x - y + 3z = -4,\ 2x + z = 1$

— X —

161 (Gu)

SEAT No.________ No. of Printed Pages : 3

SARDAR PATEL UNIVERSITY
SEM II , MATHEMATICS
PAPER US02CMTH21

B.Sc.-II SEM

Time:2 Hours **Total Marks: 70**

Date : 29-03-2019 , Friday **Time : 2-00 to 5-00**

1. યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ આપો : **[10]**

(1) $-\sqrt{3}+i$ નો કોણ _____ છે.

(a) 60° (b) 150°

(c) 30° (d) 120°

(2) જો $z=2+3i$, તો $z\bar{z}=$ ________ થાય.

(a) 13 (b) $\sqrt{13}$

(c) 5 (d) $\sqrt{5}$

(3) $(1+i)^4=$ ________

(a) $4i$ (b) $-4i$

(c) -4 (d) $1+i$

(4) જો _______ હોય તો ચોરસ શ્રેણિક A ને વિ-હર્મિશિયન શ્રેણિક કહેવાય.

(a) $A=-A^\theta$ (b) $A=-A^T$

(c) $A=A^\theta$ (d) $A=A^T$

(5) શ્રેણિક $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ એ ______ શ્રેણિક કહેવાય.

(a) એકમ (b) શુન્ય

(c) હાર (d) સ્તંભ

(6) કોઇ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે શ્રેણિક $A-A'$ એ _________ શ્રેણિક કહેવાય.

(a) સંમિત (b) વિસંમિત

(c) હર્મિશિયન (d) વિ-હર્મિશિયન

(7) જો I_3 એ કક્ષા 3 નો એકમ શ્રેણિક હોય તો $(I_3)^{-1}=$ _____

(a) 0 (b) $3I_3$

(c) I_3 (d) જરુરી નથી કે અસ્તિત્વ હોય.

(8) જો $1,\omega,\omega^2$ એ 1 ન ઘનમુળો હોય તો નીચે ના મા થી કોનુ અસ્તિત્વ હોય?

(a) $\begin{bmatrix}1 & \omega\\\omega & \omega^2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}\omega^2 & 1\\1 & \omega\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1 & \omega^2\\\omega^2 & \omega\end{bmatrix}$ (d) એકેય નહિ.

(9) જો $\lambda=4$ એ શ્રેણિક A નુ એક લાક્ષણિક મુલ્ય હોય તો શ્રેણિક $A+2I$ નુ લાક્ષણિક મુલ્ય ____ થાય.

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 8

(10) કેલે-હેમિલ્ટન પ્રમેય ______ શ્રેણિકો માટે જ છે.

(a) અસામાન્ય (b) ચોરસ

(c) શૂન્ય (d) થોડા લમ્બ શ્રેણિકો માટે

(P.T.O.)

2. કોઈ પણ દસ ના જવાબ લખો.. **[20]**

1) સંકર સંખ્યા$1+i$ ને ધ્રુવીય સ્વરુપ મા રજુ કરો.

2) સાબિત કરો : $\tan ix = i \tanh x$.

3) સાબિત કરો : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

4) જો $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ અને વિધેય $f : A \rightarrow N$, $f(x) = x^2 + 1$ મુજબ વ્યાખ્યયિત હોય તો f નો વિસ્તાર શોધો.

5) જો $f : R \rightarrow R$, $f(x) = |x|$ મુજબ વ્યાખ્યયિત હોય તો સાબિત કરો કે $fof = f$.

6) વ્યાખ્યા આપો : પર્યાયિક(સમ) સંબંધ (Equivalence relation).

7) સાબિત કરો કે જો શ્રેણિક નુ વ્યસ્ત અસ્તિત્વ માં હોય તો તે અનન્ય જ હોય.

8) શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ની કોટિ શોધો.

9) સાબિત કરો કે $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ સ્વયંઘાત(idempotent)છે.

10) જો શ્રેણિક A સામાન્ય શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે A^{-1} ના લાક્ષણિક મુલ્યો A ના લાક્ષણિક મુલ્યો ના વ્યસ્ત હોય.

11) શ્રેણિક $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મુલ્યો શોધો.

12) સુરેખ સમિકરણો ની સંગતતા માટે ની શરત લખો.

3. (a) સાબિત કરો કે $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \forall n \in Q$. **[6]**

(b) સમિકરણ $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ ને ઉકેલો. **[4]**

OR

3. (a) $\log \sin(x+iy)$ માટે વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગ મેળવો. **[5]**

(b) $\cos^8\theta$ ને cosine ના θ ના ગુણિતો ની શ્રેણી મા મેળવો. **[5]**

4. (a) વિધેય $f : R \rightarrow R, f(x) = 5x + 7, x \in R$ મુજબ વ્યાખયાયિત હોય તો સાબિત કરો કે f નો વ્યસ્ત મળે છે અને f^{-1} પણ શોધો. **[5]**

(b) સાબિત કરો કે સંબંધ 'congruence modulo m' એ પુર્ણાંક સંખ્યાગણ Z પર નો સમ સંબંધ (equivalence relation) છે. **[5]**

OR

4. (a) જો A અને B અનુક્રમે $m \times n$ અને $n \times p$ કક્ષા ના શ્રેણિકો હોય તો સાબિત કરો કે $(AB)' = B'A'$. **[5]**

(b) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ તો α અને β ની કિમતો શોધો કે જેથી $(\alpha I + \beta A)^2 = A$ થાય **[5]**

5. (a) ગોસ-જોરડન(Gauss-Jordan) રીત નો ઉપયોગ કરિ શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1} મેળવો. [5]

(b) જો A એ $m \times n$ કક્ષા નો શ્રેણિક હોય અને R એ m કક્ષા નો સામાન્ય શ્રેણિક હોય તો બતાવો કે $\rho(RA) = \rho(A)$. [5]

OR

5. (a) જો $AX = B$ એ સુરેખ સમીકરણો ની સન્હતિ હોય અને A એ ચોરસ ગુણાંક શ્રેણિક હોય તો [5]
સાબિત કરો કે (i) સન્હતિ નો અનન્ય ઉકેલ $X = A^{-1}B$. છે જ્યા A એ સામાન્ય શ્રેણિક છે.
(ii) જો A અસામાન્ય શ્રેણિક હોય તો સન્હતિ ને ઉકેલ નથી અથવા અનંત ઉકેલો છે.

(b) ગુણાંક શ્રેણિક નો વ્યસ્ત મેળવી નીચે ના સમીકરણો ને ઉકેલો. [5]
$4x + 2y - z = 9,\ x - y + 3z = -4,\ 2x + z = 1$

6. (a) કેલે-હેમિલ્ટન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. [5]

(b) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ માટે કેલે-હેમિલ્ટન પ્રમેય ચકાસો અને A^{-1} શોધો. [5]

OR

6. (a) સાબિત કરો કે એકાત્મક શ્રેણિક ના લાક્ષણિક મુલ્ય નુ માન એકમ છે. [5]

(b) ગોસ ની લોપ ની રીત થી નીચે ની સમિકરણ સંહતિ ને ઉકેલો. [5]
$4x + 2y - z = 9,\ x - y + 3z = -4,\ 2x + z = 1$

— X —