SEAT No.______ No. of Printed Pages : 3

[134/A-32] Eng

SARDAR PATEL UNIVERSITY

B.Sc. SEM-II

US02CMTH02 (MATHEMATICS)

(Matrix Algebra and Differential Equations)

Date:-26-03-2019, Tuesday Maximum Marks:70

Time:-02:00 pm To 04:00 pm

Note:- Right side figure shows marks.

Q:-1 Choose the correct option in the following questions, mention the correct option In the answer book: [10]

(1) Characteristic roots of the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ are all _____.

(a) 1, 3 (b) 3, 8 (c) 1, 8 (d) 7, 8

(2) If a matrix is of $m \times n$ order then each column has _____.

(a) m elements (b) $m \times n$ elements

(c) n elements (d) $m \cdot n$ elements

(3) For any square matrix A the matrix $A + A'$ is a _____.

(a) Zero matrix (b) Symmetric matrix

(c) Hermitian matrix (d) Skew-symmetric matrix.

(4) If $|A + 4I| = 0$ then one of the characteristic root of A is _____.

(a) 1 (b) 4 (c) -4 (d) -1

(5) Characteristic equation of the identity matrix I of order 3×3 is _____.

(a) $x^3 + 1 = 0$ (b) $x^3 - 1 = 0$ (c) $(x-1)^3 = 0$ (d) $(x+1)^3 = 0$

(6) The complementary function of $(D^2 + 4)y = \log_e 2x$ is _____.

(a) $c_1e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ (b) $c_1e^x + c_2e^{-x}$

(c) $(c_1 + c_2 x)e^{2x}$ (d) $c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

(7) The complementary function of $(D - 3)^2y = e^{6x}$ is _____.

(a) $c_1e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ (b) $(c_1 + c_2 x) e^{3x}$

(c) $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}$ (d) none of these

(8) The particular Integral of $(D + 2)^3y = e^x$ is _____.

(a) $\frac{e^x}{8}$ (b) $\frac{e^x}{27}$ (c) $\frac{e^x}{6}$ (d) $\frac{x^3}{3!} e^x$

(9) The particular Integral of $(D^2 + 25)\, y = \sin 5x$ is _____.

(a) $-\left(\frac{x}{10}\right) \cos 5x$ (b) $-\left(\frac{x}{10}\right) \sin 5x$ (c) $\frac{x}{10} \cos 5x$ (d) $\frac{x}{10} \sin 5x$

(10) The particular Integral of $(D^2 + 1)\, y = 2x^3$ is _____.

(a) $x^3 - 6x$ (b) $2x^3 - 12x$ (c) $x^3 + 6x$ (d) $2x^3 + 12x$

[P.T.O.]

Q:-2 Answer the following questions in short (Attempt any ten). [20]

(1) Define **a diagonal matrix** with one illustrations.

(2) If $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ then find the Symmetric matrix P and Skew-Symmetric matrix Q such that P + Q = A.

(3) If $\lambda = 3$ is a one characteristic root of $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ then find its corresponding characteristic vector.

(4) Explain, Why in general $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

(5) Find the characteristic roots of a matrix $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

(6) Find the characteristic equation of a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(7) Let y_1 and y_2 be two solutions of a linear differential equation $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0$ and c_1, c_2 be two arbitrary constants. then prove that $c_1 y_1 + c_2 y_2$ is also a solution.

(8) Find the complementary function of $(7D^2 + 12D - 4)\, y = e^{5x}$.

(9) Find the particular integral of $(D^3 - 1)\, y = x^4$.

(10) Find the particular integral of $(D^4 - 8D^2 + 11)\, y = \cos 3x$.

(11) Find the particular integral of $(D^2 - 1)\, y = \sin x$.

(12) Find the particular integral of $(D^3 - 2D + 5)\, y = e^{3x}$.

Q:-3(a) State and prove reversal law for the transpose of a product of matrices. [5]

(b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, then find out the values of α, β such that $(\alpha I + \beta A)^2 = A$. [5]

OR

(c) Expand: $(A + B)^2$ and $(A + B)^3$. Where A, B are any n×n matrices. What do these results become when A and B are commute? [5]

(d) Show that every square matrix can be expressed in one and only one way as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix. [5]

Q:4(a) State and prove Cayley-Hemilton theorem. [5]

(b) Find the characteristic equation of the matrix A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ and verify that it is satisfied by A. [5]

OR

(c) If S is a real Skew-Symmetric matrix then prove that I – S is non singular and the matrix A = (I + S) $(I - S)^{-1}$ is orthogonal. [5]

(d) Find the characteristic roots and characteristic vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ [5]

Q:-5(a) Solve: $(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = \cosh x$. [5]

(b) Obtain rule for finding the particular integral of $f(D)y = e^{mx}$, Where m is constant. [5]

OR

(c) Solve: $(D^2 - 3D + 5)y = e^{-x}$. [5]

(d) Solve $(D^2 - 5D + 6)y = 4e^x$ subject to the condition that $y(0) = y'(0) = 1$. Hence find y(16). [5]

Q:6(a) In usual notation prove that $\frac{1}{f(D)} e^{ax} V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$, Where V is a function of x. [5]

(b) Solve: $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 15(x - x^{-1})$. [5]

OR

(c) Solve: $(D^2 + 2)y = (x^2 + 1) e^{3x} + e^x \cos 2x$. [5]

(d) In usual notation prove that $\frac{1}{f(D)} xV = [x - \frac{1}{f(D)} f'(D)] \frac{1}{f(D)} V$, Where V is a function of x. [5]

——x——

SEAT No.________ No. of Printed Pages : 3

[134/A-32]
(ગુ)

SARDAR PATEL UNIVERSITY
B.Sc. SEM-II
Gujarati version
US02CMTH02 (MATHEMATICS)
(Matrix Algebra and Differential Equations)

Date:-26-03-2019, Tuesday Maximum Marks:70
Time:02:00 PM To 04:00 PM

Note:-જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નોના ગુણભાર દર્શાવે છે.

Q:-1 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના સાચા જવાબ ઉત્તરવહીમાં લખો. [10]

(1) શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ના બધા લાક્ષણિક બીજો ________ છે.
(a) 1, 3 (b) 3, 8 (c) 1, 8 (d) 7, 8

(2) જો શ્રેણિક m×n ક્રમનો હોય તો તેના દરેક સ્તંભમાં______ હોય છે.
(a) m ઘટકો (b) m×n ઘટકો (c) n ઘટકો (d) m·n ઘટકો

(3) જો A કોઈ ચોરસ શ્રેણિક હોય તો $A + A'$ ________ છે.
(a) શૂન્ય શ્રેણિક (b) સંમિત શ્રેણિક (c) હરમિશીયન શ્રેણિક (d) વિ-સંમિત શ્રેણિક

(4) જો $|A + 4I| = 0$ હોય તો શ્રેણિક A નું એક લાક્ષણિક મૂલ્ય ________ છે.
(a) 1 (b) 4 (c) -4 (d) -1

(5) 3×3 ક્રમના એકમ શ્રેણિક I નું લાક્ષણિક સમીકરણ ________ છે.
(a) $x^3 + 1 = 0$ (b) $x^3 - 1 = 0$ (c) $(x-1)^3 = 0$ (d) $(x+1)^3 = 0$

(6) વિકલ સમીકરણ $(D^2 + 4)y = \log_e 2x$ નું પૂરક વિધેય _______ થાય.
(a) $c_1e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ (b) $c_1e^{x} + c_2e^{-x}$
(c) $(c_1 + c_2 x) e^{2x}$ (d) $c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

(7) $(D - 3)^2 y = e^{6x}$ નું પૂરક વિધેય ______ છે.
(a) $c_1e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ (b) $(c_1 + c_2 x) e^{3x}$
(c) $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}$ (d) આમાંથી એકપણ નહિ.

(8) $(D + 2)^3 y = e^x$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ ______ છે.
(a) $\frac{e^x}{8}$ (b) $\frac{e^x}{27}$ (c) $\frac{e^x}{6}$ (d) $\frac{x^3}{3!} e^x$

(9) $(D^2 + 25) y = \sin 5x$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ ______ છે.
(a) $-(\frac{x}{10}) \cos 5x$ (b) $-(\frac{x}{10}) \sin 5x$ (c) $\frac{x}{10} \cos 5x$ (d) $\frac{x}{10} \sin 5x$

(10) $(D^2 + 1) y = 2x^3$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ ________ છે.
(a) $x^3 - 6x$ (b) $2x^3 - 12x$ (c) $x^3 + 6x$ (d) $2x^3 + 12x$

[P.T.O.]

Q:-2 નીચે આપેલા પ્રશ્નોમાંથી કોઈપણ 10 પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો. [20]

(1) એક ઉદાહરણ સહિત વિકર્ણી શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.

(2) જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ હોય તો સંમિત શ્રેણિક P અને વિ-સંમિત શ્રેણિક Q એવા શોધો કે જેથી $P + Q = A$ થાય.

(3) જો $\lambda = 3$ એ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ નું એક લાક્ષણિક બીજ હોય તો તેને સંગત લાક્ષણિક સદિશ શોધો.

(4) વ્યાપક રીતે $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$ શા માટે થાય છે, સમજાવો.

(5) શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક બીજો શોધો.

(6) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ શોધો..

(7) ધારોકે y_1અને y_2એ સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0$ ના બે ઉકેલો અને C_1, C_2સ્વૈર અચળાંકો હોય તો સાબિત કરો કે $C_1 y_1 + C_2 y_2$ પણ તેનો ઉકેલ છે.

(8) $(7D^2 + 12D - 4)y = e^{5x}$ નું પૂરક વિધેય શોધો.

(9) $(D^3 - 1)y = x^4$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

(10) $(D^4 - 8D^2 + 11)y = \cos 3x$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

(11) $(D^2 - 1)y = \sin x$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

(12) $(D^3 - 2D + 5)y = e^{3x}$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

Q:-3 (a) શ્રેણિકનાં ગુણાકારનો પરિવર્ત માટેનો વિપાર્યસતાનો (reversal law) નિયમ લખો અને સાબિતકરો. [5]

(b) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય તો α, β ની એવી કિંમતો શોધો કે જેથી $(\alpha I + \beta A)^2 = A$ થાય. [5]

OR

(c) વિસ્તરણ કરો: $(A + B)^2$ અને $(A + B)^3$. જ્યાં A, B એ $n \times n$ ક્રમના શ્રેણિકો છે.જો A અને B સમક્રમી હોય તો આ પરિણામો શું મળે ? [5]

(d) સાબિત કરો કે દરેક ચોરસ શ્રેણિકને સંમિત અને વિ-સંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા સ્વરૂપે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે. [5]

Q:-4 (a) કેલે-હેમિલ્ટન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. [5]

(b) શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો અને ચકાસો કે શ્રેણિક A તેને સંતોષે છે. [5]

OR

(c) જો S વાસ્તવિક વિ-સંમિત શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે I-S અસામાન્ય શ્રેણિક અને શ્રેણિક $A = (I+S)(I-S)^{-1}$ લંબગત છે. [5]

(d) શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને લાક્ષણિક સદિશો શોધો. [5]

Q:-5(a) ઉકેલો: $(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = \cosh x$. [5]

(b) $f(D)y = e^{mx}$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધવાનો નિયમ મેળવો. જ્યાં m અચળ છે. [5]

OR

(c) ઉકેલો: $(D^2 - 3D + 5)y = e^{-x}$. [5]

(d) $y(0) = y'(0) = 1$ શરતોને અનુરૂપ સમીકરણ $(D^2 - 5D + 6)y = 4e^x$ ઉકેલો. y(16) પણ શોધો. [5]

Q:-6(a) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D)} e^{ax} V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$, જ્યાં V એ ચલ x નું વિધેય છે. [5]

(b) ઉકેલો: $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 15(x - x^{-1})$ [5]

OR

(c) ઉકેલો: $(D^2 + 2)y = (x^2 + 1) e^{3x} + e^x \cos 2x$. [5]

(d) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D)} xV = [x - \frac{1}{f(D)} f'(D)] \frac{1}{f(D)} V$, જ્યાં V એ ચલ x નું વિધેય છે. [5]

———x———