SEAT No.________ No of printed pages : 3

SC

[7/A-6]
Eng.

SARDAR PATEL UNIVERSITY
B.Sc.(SEMESTER - IV) EXAMINATION - 2018
Tuesday , 24^{th} April , 2018
MATHEMATICS : US04EMTH05
(Calculus and Algebra - 2)

Time : 10:00 a.m. to 12:00 noon Maximum Marks : 70

Que.1 Fill in the blanks. 10

(1) If $f(x,y) \leq f(a,b)$, for all $(x,y) \in E \subset R^2$, then f is said to have .... point at (a,b) .

(a)Local extreme point (b)Global minimum (c) Global maximum (d) Constant value

(2) Let $E \subset R^2$ and $f : E \to R$ admits the first order partial derivative at $(a,b) \in E$ then $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Define $A = f_{xx}(a,b)$ $B = f_{xy}(a,b)$ and $C = f_{yy}(a,b)$ then $f(a,b)$ is local minimum of f if ....

(a) $AC - B^2$ and $A \leq 0$ (b) $AC - B^2 \geq 0$ and $A \geq 0$ (c) $AC - B^2 \leq 0$ (d) $AC - B^2 = 0$

(3) $f(x,y) = x^4 + x^2y + y^2$ then $f_{xy} =$ ....

(a) $2x^2$ (b) $2y$ (c) $4y$ (d) $2x$

(4) $\overline{\nabla} f =$ ....

(a) $\Sigma\bar{i}\frac{\partial f}{\partial x}$ (b) $\Sigma i\frac{\partial f}{\partial x}$ (c) Σix (d) None

(5) $\overline{\nabla} \cdot (f\overline{v}) - f(\overline{\nabla} \cdot \overline{v}) =$ ....

(a) $\overline{v} \cdot (\overline{\nabla} f)$ (b) $\overline{v}(\overline{\nabla} f)$ (c) $f \cdot (\overline{\nabla} v)$ (d) $\overline{v}(\overline{\nabla} \cdot f)$

(6) $\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} f) =$ ....

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) None

(7) $\overline{\nabla}^2 (fg) =$ ....

(a)$f\overline{\nabla}^2 g - 2\overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g - g\overline{\nabla}^2 f$ (b)$f\overline{\nabla}^2 g + 2\overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g + g\overline{\nabla}^2 f$ (c)$f\overline{\nabla}^2 g + \overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g + g\overline{\nabla}^2 f$ (d)None

(8) $\overline{\nabla} \cdot (f\overline{\nabla} g) =$ ....

(a) $f\overline{\nabla}^2 g + \overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g$ (b) $g\overline{\nabla}^2 f - \overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g$ (c) $f\overline{\nabla}^2 g - \overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g$ (d) None

(9) In boolean Algebra $a + a =$ ....

(a) 1 (b) 0 (c) 2a (d) a

(10) In boolean Algebra $a.(a + b) =$ ....

(a) b (b) a (c) a+b (d) a.b

Que.2 Answer the following (Any Ten)

(1) Find stationary points of $y^2 + x^2y + x^4$.

(2) Find stationary points of $(y - x)^4 + (x - 2)^4$.

(3) Find stationary points of $x^3y^2(1 - x - y)$.

[P.T.O.]

(4) Define : Vectorial differential operator , Gradient of a scalar field ,Laplace equation , Unit normal vector .

(5) Prove that $\overline{\nabla}(fg) = f\overline{\nabla}g + g\overline{\nabla}f$.

(6) Find unit normal vector of following surfaces $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ at (1 , 0 , 2) .

(7) Find Curl $\bar{v}$ for $\bar{v} = \bar{r}|\bar{r}|^{-3}$, where $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$.

(8) Prove that $\overline{\nabla} \cdot (r^n \bar{r}) = (n+3)r^n$, where $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$.

(9) Find $\overline{\nabla} \cdot \left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right)$, where $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$.

(10) State laws of Boolean Algebra .

(11) State laws of complements in Boolean Algebra .

(12) If $a + x = b + x$ & $a + x' = b + x'$ then prove that $a = b$.

Que.3 (a) A rectangular box open at the top is to have a volume of $32m^3$. Find the dimension of box so that the total surface area is minimum . 5

(b) Find the maxima and minima for the function $x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$, if they exist . 5

OR

ue.3 (c) Investigate the maxima and minima of the function $f(x, y) = x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$. 6

(d) Show that $2x^4 - 3x^2y + y^2$ has neither a maximum nor a minimum at $(0, 0)$. 4

ue.4 (a) Prove that $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ is Harmonic function. 5

(b) Find direction derivative of $f(x, y, z) = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ at point $(2, -1, 2)$ in the direction of $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$. 5

OR

e.4 (c) Prove that $f(x, y, z) = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ is Harmonic function. 4

(d) Prove that $\overline{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$, where $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$,$r = |\bar{r}|$. 3

(e) Find gradient of $f(x, y) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ at point $(1, 2, 3)$. 3

.5 (a) Prove that $\overline{\nabla}^2(fg) = f\overline{\nabla}^2 g + g\overline{\nabla}^2 f + 2\overline{\nabla}f \cdot \overline{\nabla}g$. 4

(b) Prove that $\overline{\nabla} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\overline{\nabla} \times \bar{u}) - \bar{u} \cdot (\overline{\nabla} \times \bar{v})$. 3

(c) If $f(x, y) = log(x^2 + y^2)$ then prove that $\overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla}f) = \overline{\nabla}^2 f = 0$. 3

OR

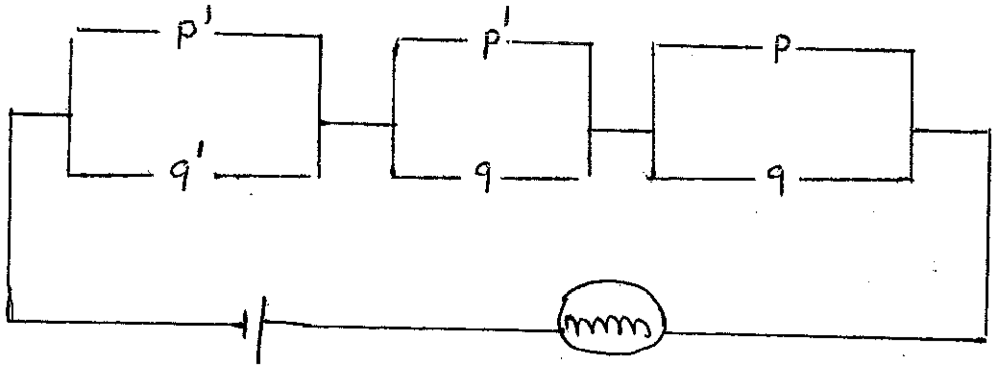
5 (d) Prove that $\overline{\nabla} \cdot (f\overline{\nabla}g) = f\overline{\nabla}^2 g + \overline{\nabla}f \cdot \overline{\nabla}g$. Hence prove that $\overline{\nabla} \cdot (f\overline{\nabla}g - g\overline{\nabla}f) = f\overline{\nabla}^2 g - g\overline{\nabla}^2 f$. 5

(e) Verify $\overline{\nabla} \cdot (f\bar{v}) = f(\overline{\nabla} \cdot \bar{v}) + \bar{v} \cdot \overline{\nabla}f$ for $f = e^{xyz}$ and $\bar{v} = ax\bar{i} + by\bar{j} + cz\bar{k}$. 5

Que.6 (a) Prove that in Boolean algebra , every triple of elements a, b, c satisfies the identity $ab + bc + ca = (a + b)(b + c)(c + a)$. 3

(b) Prove that in Boolean algebra B , Prove that $(a + b)' = a'b'$, $\forall\ a, b \in B$. 3

(c) Find the boolean function of switching circuit given below and simplify it . 4

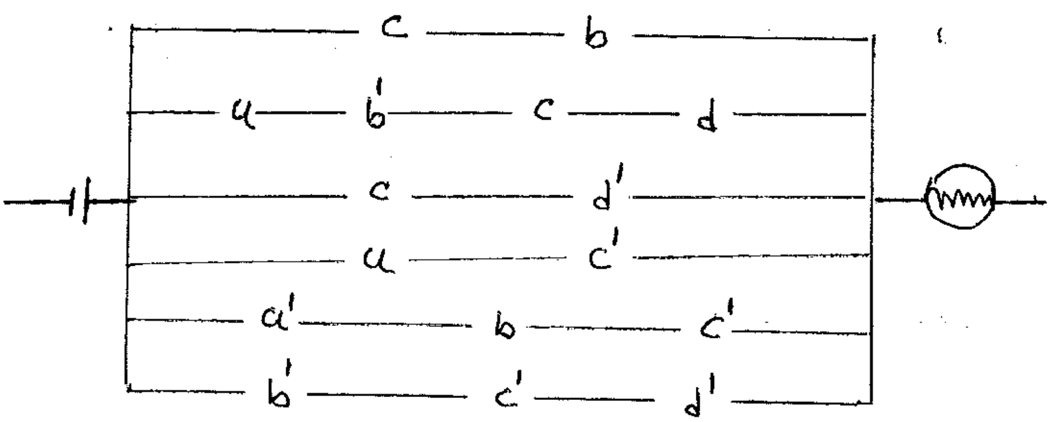


OR

Que.6 (d) If $a \leq b$ in boolean algebra B , then prove that $a + bc = b(a + c)$, $\forall\ a, b, c \in B$. 3

(e) In every Boolean algebra B, prove that $a(bc) = (ab)c$, $\forall\ a, b, c \in B$. 3

(f) Find the boolean function of switching circuit given below and simplify it . 4



———×———

SEAT No.________

No of printed pages : 3

[7/A-6]
૯૫.

SARDAR PATEL UNIVERSITY
B.Sc.(SEMESTER - IV) EXAMINATION - 2018
Tuesday , 24^{th} April , 2018
MATHEMATICS : US04EMTH05
(Calculus and Algebra - 2)

Time : 10:00 a.m. to 12:00 noon. Maximum Marks : 70

Que.1 યોગ્ય વિકલ્પનો ઉપયોગ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો . 10

(1) જો $f(x,y) \le f(a,b)$, બધા જ $(x,y) \in E \subset R^2$ માં હોય ,તો બિંદુ (a,b) પાસે f ને ....હોય .

(a) લોકલ એક્સ્ટ્રીમ બિંદુ (b) ગ્લોબલ લઘુતમ (c) ગ્લોબલ મહતમ (d) અચળ કિમત

(2) જો $E \subset R^2$ હોય અને $f : E \to R$ એ $(a,b) \in E$ પાસે એક ઘાતીય પાર્શીયલ વિકલન હોય તો $f_x(a,b) = f_y(a,b)$=0.જો $A = f_{xx}(a,b)$ $B = f_{xy}(a,b)$ અને $C = f_{yy}(a,b)$ હોય અને .... હોય તો $f(a,b)$ લોકલ લઘુતમ થાય .

(a)$AC - B^2$ and $A \le 0$ (b) $AC - B^2 \ge 0$ and $A \ge 0$(c)$AC - B^2 \le 0$ (d)$AC - B^2 = 0$

(3) જો $f(x,y) = x^4 + x^2y + y^2$ હોય તો $f_{xy} =$ .... થાય .

(a) $2x^2$ (b) 2y (c) 4y (d) 2x

(4) $\overline{\nabla} f =$ ....

(a) $\Sigma \bar{i}\frac{\partial f}{\partial x}$ (b) $\Sigma i\frac{\partial f}{\partial x}$ (c) Σix (d) કોઈ પણ નહીં

(5) $\overline{\nabla} \cdot (f\overline{v}) - f(\overline{\nabla} \cdot \overline{v}) =$ ....

(a) $\overline{v} \cdot (\overline{\nabla} f)$ (b) $\overline{v}(\overline{\nabla} f)$ (c) $f \cdot (\overline{\nabla} v)$ (d) $\overline{v}(\overline{\nabla} \cdot f)$

(6) $\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} f) =$.......

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) કોઈ પણ નહીં

(7) $\overline{\nabla}^2(fg) =$ ....

(a)$f\overline{\nabla}^2 g - 2\overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g - g\overline{\nabla}^2 f$ (b) $f\overline{\nabla}^2 g + 2\overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g + g\overline{\nabla}^2 f$ (c)$f\overline{\nabla}^2 g + \overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g + g\overline{\nabla}^2 f$ (d)કોઈ પણ નહીં

(8) $\overline{\nabla} \cdot (f\overline{\nabla} g) =$ ......

(a) $f\overline{\nabla}^2 g + \overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g$ (b) $g\overline{\nabla}^2 f - \overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g$ (c) $f\overline{\nabla}^2 g - \overline{\nabla} f \cdot \overline{\nabla} g$ (d) કોઈ પણ નહીં

(9) બુલિયન એલ્જિબ્રા માં $a + a =$ .... થાય .

(a) 1 (b) 0 (c) 2a (d) a

(10) બુલિયન એલ્જિબ્રા માં $a.(a + b) =$ .... થાય

(a) b (b) a (c) a+b (d) a.b

Que.2 નીચેના પ્રશ્નના જવાબ આપો. (ગમેતે દસ) 20

(1) $y^2 + x^2y + x^4$ ના સ્ટેસ્નરી બિંદુઓ શોધો. .

(2) $(y - x)^4 + (x - 2)^4$ ના સ્ટેસ્નરી બિંદુઓ શોધો. .

[P.T.O.]

(3) $x^3y^2(1-x-y)$ ના સ્ટેસ્નરી બિંદુઓ શોધો.

(4) વ્યાખ્યા આપો : વિકલ (differential) ઓપરેટર , $\overline{\nabla} f$, લાપ્લાસ નું સમીકરણ , યુનિટ નોર્મલ સદીસ .

(5) સાબિત કરો કે $\overline{\nabla}(fg) = f\overline{\nabla}g + g\overline{\nabla}f$ થાય .

(6) $z^2 = 4(x^2+y^2)$ પ્રુસ્ઠનો (1 , 0 , 2) બિંદુ પાસે યુનિટ નોર્મલ સદીસ શોધો .

(7) Curl $\bar{v}$ શોધો ,જ્યાં $\bar{v} = \bar{r}|\bar{r}|^{-3}$, અને $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$ છે .

(8) સાબિત કરો કે $\overline{\nabla} \cdot (r^n\bar{r}) = (n+3)r^n$, જ્યાં $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$.

(9) $\overline{\nabla} \cdot \left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right)$ શોધો , જ્યાં $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$ છે .

(10) બુલિયન એલ્જિબ્રાના નિયમ લખો .

(11) બુલિયન એલ્જિબ્રામાં વ્યસ્તના (complements) નિયમ લખો .

(12) બુલિયન એલ્જિબ્રામાં જો $a+x = b+x$ & $a+x' = b+x'$ હોય તો સાબિત કરો કે $a = b$ થાય .

Que.3 (a) $32m^3$ કદ વાળું લંબ ચોરસ બોક્સ ઉપરથી ખુલ્લુ છે . જો આખો સરફેસ એરિયા લઘુતમ થાય તો બોક્સનું ડાઈમેન્શન શોધો . 5

(b) $x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ વિધેય માટે મહતમ અને લઘુતમ કિમત શોધો . 5

OR

Que.3 (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 63(x+y) + 12xy$ વિધેય માટે મહતમ અને લઘુતમ કિમત શોધો . 6

(d) $2x^4 - 3x^2y + y^2$ વિધેયને $(0,0)$ બિંદુ પાસે મહતમ અને લઘુતમ કિમત મળતી નથી . 4

Que.4 (a) સાબિત કરો કે $f(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2}$ હાર્મોનિક વિધેય છે . 5

(b) $f(x,y,z) = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ નો (2,-1,2) બિંદુ પાસે અને $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$ ની દિશામાં ડાઇરિક્શનલ વિકલન શોધો . 5

OR

Que.4 (c) સાબિત કરો કે $f(x,y,z) = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ હાર્મોનિક વિધેય છે . 4

(d) સાબિત કરો કે $\overline{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$, જ્યાં $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$. 3

(e) $f(x,y) = (x^2+y^2+z^2)^2$ માટે $(1,2,3)$ બિંદુ પાસે $\overline{\nabla}f$ શોધો . 3

Que.5 (a) સાબિત કરો કે $\overline{\nabla}^2(fg) = f\overline{\nabla}^2 g + g\overline{\nabla}^2 f + 2\overline{\nabla}f \cdot \overline{\nabla}g.$ 4

(b) સાબિત કરો કે $\overline{\nabla} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\overline{\nabla} \times \bar{u}) - \bar{u} \cdot (\overline{\nabla} \times \bar{v})$. 3

(c) જો $f(x,y) = log(x^2+y^2)$ હોય તો સાબિત કરો કે $\overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla}f) = \overline{\nabla}^2 f = 0.$ 3

OR

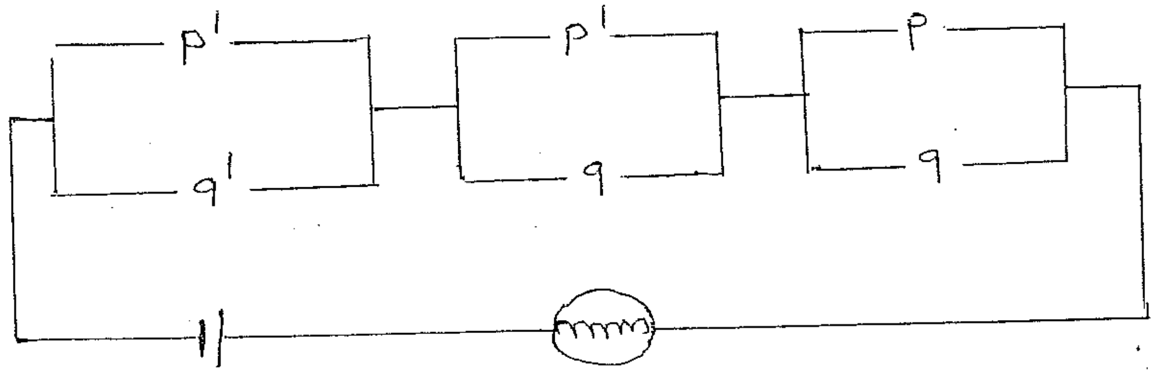
Que.5 (d) સાબિત કરો કે $\overline{\nabla} \cdot (f\overline{\nabla}g) = f\overline{\nabla}^2 g + \overline{\nabla}f \cdot \overline{\nabla}g$. તેના ઉપરથી સાબિત કરો કે $\overline{\nabla} \cdot (f\overline{\nabla}g - g\overline{\nabla}f) = f\overline{\nabla}^2 g - g\overline{\nabla}^2 f$. 5

(e) ચકાસો : $\overline{\nabla} \cdot (f\bar{v}) = f(\overline{\nabla} \cdot \bar{v}) + \bar{v} \cdot \overline{\nabla}f$,જ્યાં $f = e^{xyz}$ અને $\bar{v} = ax\bar{i} + by\bar{j} + cz\bar{k}$ છે . 5

Que.6 (a) બુલિયન એલ્જિબ્રા માં દરેક a, b, c માટે સાબિત કરો કે $ab + bc + ca = (a+b)(b+c)(c+a)$ થાય . 3

(b) બુલિયન એલ્જિબ્રા B માટે સાબિત કરો કે $(a+b)' = a'b'$, $\forall\ a, b \in B$. 3

(c) નીચે આપેલી સર્કિટ માટે બુલિયન વિધેય શોધો અને એને સિંપ્લિફાય કરો. . 4

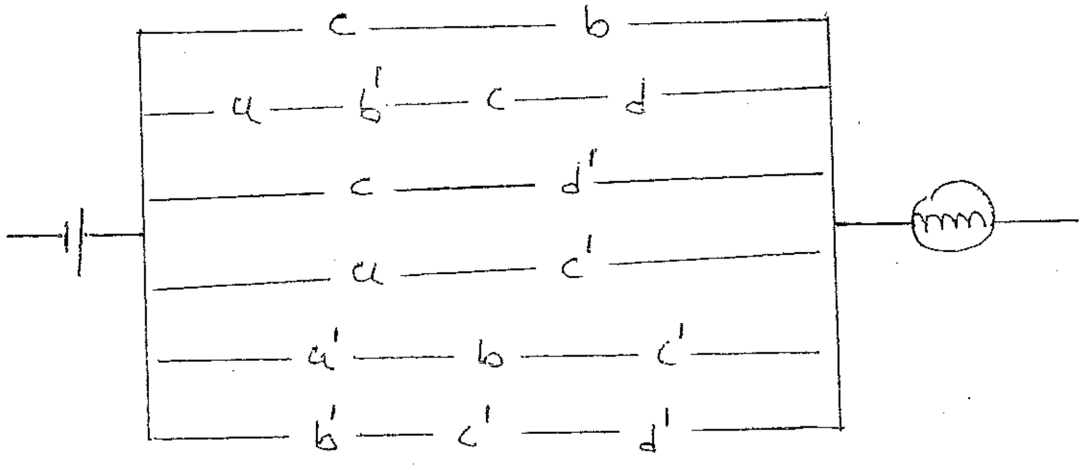


OR

Que.6 (d) બુલિયન એલ્જિબ્રા B , જો $a \leq b$ હોય તો સાબિત કરો કે $a + bc = b(a+c)$, $\forall;\ a, b, c \in B$. 3

(e) બુલિયન એલ્જિબ્રા B માટે , સાબિત કરો કે $a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in B$. 3

(f) નીચે આપેલી સર્કિટ માટે બુલિયન વિધેય શોધો અને એને સિંપ્લિફાય કરો. . 4



——— x ———