(163-E) Seat No. ....

No. of Printed Pages : 3

SARDAR PATEL UNIVERSITY

24th October- 2018

B.Sc.-Sem-I, MATHEMATICS- US01CMTH21

(Calculus)

Time:3 Hours, 2.00 to 5.00 pm

Total Marks: 70

1. Answer the following by selecting correct choice from the options : [10]

(1) If y = log(ax+b) then $y_n =$ _____.

(a) $\frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)! a^n}{(ax+b)^n}$

(c) $\frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^n}$ (d) $\frac{(-1)^{n-1} n! a^n}{(ax+b)^n}$.

(2) Coshx + Sinhx = _____.

(a) e^x (b) e^{-x}

(c) 1 (d) -1 .

(3) Directrix of $y^2 = 10x$ is_____.

(a) $x = \frac{5}{2}$ (b) $x = -\frac{5}{2}$

(c) $x = 10$ (d) $x = -10$

(4) Asymptotes of y $= x^3 - 3x^2 + 2x$ are _____.

(a) x =0,1,2 ;y =1 (b) x =0,-1,2 ;y =1

(c) x =0,-1,2 (d) Not possible .

(5) The Curve of r =cos3θ is symmetric about _____.

(a) Polar axis (b) Normal axis

(c) Pole (d) Polaraxis ,Normal axis and Pole .

(6) If eccentricity e = 1 then conic is _____.

(a) Hyperbola (b) ellipse

(c) Circle (d)Parabola.

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{10}x$ dx = _____.

(a) $\frac{63}{256}$ (b) $\frac{63}{512}$

(c) $\frac{63\pi}{256}$ (d) None

(P.T.O)

(8) If $J_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^p x cos^q x$ dx then $J_{p,q}$ = _____.

(a) $\frac{p+1}{p+q} J_{p-2,q}$

(b) $\frac{p-1}{p+q} J_{p+2,q}$

(c) $\frac{p}{p-q} J_{p,q}$

(d) $\frac{p-1}{p+q} J_{p-2,q}$

(9) If r = a (1- cosθ) then ρ^2 = _____.

(a) $\frac{ar}{9}$

(b) $\frac{8r}{9}$

(c) $\frac{8ar}{9}$

(d) r

(10) Velocity is $\overline{V}$ = _____.

(a) $\frac{dr}{dt}$

(b) $\frac{d\overline{r}}{dt}$

(c) $|v|$

(d) None

2. Answer any TEN of the following. [20]

1) If y = cos3x then find y_4.

2) Evaluate $\lim_{x \to a} (a-x) \tan(\frac{5\pi x}{2a})$

3) If y =e^{2x} sin5x then find y_n.

4) Find the parametric equation for $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

5) Discuss symmetries of the curve xy − 16 = 0.

6) Transfer the equation r = $tan\theta + sec\theta$ in Cartesian form.

7) Evaluate $\int_0^1 x^5 sin^{-1}x$ dx.

8) The region bounded by the curve y = $\sqrt{x}$,the x-axis and the line x = 4 is revolved about the y - axis to generate a solid .Find the volume of the solid by shell method.

9) Find the area of the surface swept out by revolving the circle $x^2 + y^2 = 1$, y> 0 $about\ x - axis$.

10) For the curve y = a $sin2x$ then find $\frac{ds}{dx}$.

11) For u = $x^3 - 3xy^3$ then prove that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ = 0.

12) Definition : Acceleration of a particle.

3. (a) State and prove Leibniz's theorem. [5]

(b) Find a ,b , c so that $\lim_{x \to 0} \frac{a e^{x} - 2b\cos x + 3ce^{-x}}{x \sin x} = 2.$ [5]

OR

3. (a) If $x = \cos\left(\frac{1}{m} \log y\right)$, then find $y_n(0)$. [5]

(b) Find center - to -focus distance , foci vertices ,center and asymptotes for the hyperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$ [5]

4. (a) Discuss intercepts ,symmetries ,asymptotes ,sign of function and hence sketch the curve $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$. [5]

(b) State when a polar curve is symmetric with respect to polar axis ? Prove it. [5]

OR

4. (a) Discuss symmetries , extent ,closeness for the curve $r = 3\,(1 + \cos\theta)$. [5]

(b) In usual notation prove that $r = \frac{pe}{1 \pm e\cos\theta}$. [5]

5. (a) Obtain Reduction Formula for $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$,where $n \in N$. [5]

(b) The circle $x^2 + y^2 = a^2$ is rotated about the X-axis to generate the sphere Find its volume. [5]

OR

5. (a) Find the length of arc of the parabola $y^2 = 4ax$, $(a > 0)$, measured from the vertex to one extremity of its latusrectum. [5]

(b) Evaluate: (1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x\, \sin^4 4x\, dx.$ [5]

(2) $\int \tan^6 x\, dx.$

6. (a) For a polar equation $r = f(\theta)$ of a curve ,prove that $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$. [5]

(b) In usual notation prove that $\rho = \frac{(1+{y_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$. [5]

OR

6.(a) State and Prove Euler's theorem for z = f(x , y). [5]

(b) If $z = xy\, f\left(\frac{y}{x}\right)$ *and z is constant , then prove that* $\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{f\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x\left[y + x\frac{dy}{dx}\right]}{y\left[y - x\frac{dy}{dx}\right]}$. [5]

— X —

Sc

[163-G] Seat No: ____________ No. of printed pages: 3

SARDAR PATEL UNIVERSITY
B.Sc. (I - Semester) Examination
Wednesday, 24th October, 2018
2.00 pm - 5.00 pm
US01CMTH21 - Mathematics (Calculus)

કુલ ગુણ : ૭૦

નોંધ: જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

પ્ર.૧ નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ આપો. (૧૦)

(૧) જો $y = \log(ax+b)$ તો y_n = ________.

(a) $\frac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$

(c) $\frac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^n}$ (d) $\frac{(-1)^{n-1}\, n!\, a^n}{(ax+b)^n}$

(૨) Coshx + Sinhx = __________

(a) e^x (b) e^{-x}

(c) 1 (d) −1

(૩) $y^2 = 10x$ ની નિયામિકા............... છે.

(a) $x = \frac{5}{2}$ (b) $x = \frac{-5}{2}$

(c) x = 10 (d) x = −10

(૪) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ના અનંત સ્પર્શકો................ છે.

(a) x=0,1,2 ; y =1 (b) x=0,−1,2; y=1

(c) x = 0,−1,2 (d) શક્ય નથી

(૫) વક્ર $r = \cos 3\theta$ __________ પ્રત્યે સંમિત છે.

(a) ધ્રુવ અક્ષ (Polar axis) (b) સામાન્ય અક્ષ (Normal axis)

(c) ધ્રુવ (d) ધ્રુવ અક્ષ, સામાન્ય અક્ષ અને ધ્રુવ

(૬) જો ઉત્કેન્દ્રતા e=1 તો શાંકવ .... છે.

(a) અતિવલય (b) ઉપવલય

(c) વર્તુળ (d) પરવલય

(૭) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{10}x\, dx$ = __________

(a) $\frac{63}{256}$ (b) $\frac{63}{512}$

(c) $\frac{63\pi}{256}$ (d) એકપણ નહી

(૮) જો $J_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^p x\, Cos^q x\, dx$ તો $J_{p,q}$ = ________.

(a) $\frac{p+1}{p+q} J_{p-2,q}$ (b) $\frac{p-1}{p+q} J_{p+2,q}$

(c) $\frac{p}{p-q} J_{p,q}$ (d) $\frac{p-1}{p+q} J_{p-2,q}$

(૯) જો $r = a(1-\cos\theta)$ તો $\rho^2 =$ ________.

(a) $\frac{ar}{9}$ (b) $\frac{8r}{9}$

(c) $\frac{8ar}{9}$ (d) r

(૧૦) વેગ $\overline{V} =$ _______.

(a) $\frac{dr}{dt}$ (b) $\frac{d\overline{r}}{dt}$

(c) $|V|$ (d) none

પ્ર.૨ ગમે તે ૧૦ ના જવાબ આપો. (૨૦)

(૧) જો $y = \cos 3x$ તો y_4 શોધો.

(૨) કિંમત શોધોઃ $\lim_{x \to a} (a-x) \tan\left(\frac{5\pi x}{2a}\right)$

(૩) જો $y = e^{2x} \sin 5x$ તો y_n શોધો.

(૪) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ નું પ્રચલ સમીકરણ શોધો.

(૫) વક્ર $xy - 16 = 0$ ની સંમિતતા ચર્ચો.

(૬) સમીકરણ $r = \tan\theta + \sec\theta$ નું કાર્ટેઝિયન સ્વરૂપમાં પરિવર્તન કરો.

(૭) કિંમત શોધો : $\int_0^1 x^5 \sin^{-1}x \, dx$

(૮) વક્ર $y = \sqrt{x}$, x-અક્ષ અને રેખા $x=4$ને y-અક્ષ ની આજુબાજુ પરિભ્રમણ કરાવતાં ઘનનું ઘનફળ મેળવો. (*by shell method*)

(૯) વર્તુળ $x^2+y^2 = 1$ $(y > 0)$ ને x-અક્ષની આસપાસ પરિભ્રમણ કરાવતાં રચાતાં પૃષ્ઠનું પૃષ્ઠફળ મેળવો.

(૧૦) વક્ર $y = a \sin 2x$ માટે $\frac{ds}{dx}$ શોધો.

(૧૧) $u = x^3 - 3xy^3$ તો સાબિત કરો કે

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(૧૨) વ્યાખ્યા : કણનો પ્રવેગ

પ્ર.3

(અ) લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. (૦૫)

(બ) $\lim_{x \to 0} \frac{a e^x - 2b\cos x + 3c e^{-x}}{x \sin x} = 2$ તો a, b, c શોધો. (૦૫)

અથવા

પ્ર.3

(અ) જો $x = \cos\left(\frac{1}{m} \log y\right)$ તો $y_n(o)$ શોધો. (૦૫)

(બ) અતિવલય $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ માટે કેન્દ્રથી નાભિનું અંતર, નાભિનાં યામ, કેન્દ્ર અને અનંત સ્પર્શકો શોધો. (૦૫)

પ્ર.૪

(અ) વક્ર $y=\frac{x^2-1}{x^2-4}$ માટે અંતઃખંડો, સંમિતતા, અનંત સ્પર્શકો અને વિધેયનાં ચિહ્નની ચર્ચા કરો અને વક્રનું આલેખન કરો. (૦૫)

(બ) ધ્રુવીય વક્ર એ ધ્રુવીય અક્ષને સંમિત છે તેવું ક્યારે કહેવાય તે લખો અને સાબિત કરો. (૦૫)

અથવા

પ્ર.૪

(અ) વક્ર $r = 3(1+\cos\theta)$ માટે સંમિતતા, વિસ્તાર અને સંવૃત્તતાની ચર્ચા કરો. (૦૫)

(બ) પ્રચલિત સંકેતમાં સાબિત કરો કે $r = \frac{pe}{1 \pm e\cos\theta}$ (૦૫)

પ્ર.૫

(અ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x\, dx$, where n∈N માટે લઘુકરણ સૂત્ર મેળવો. (૦૫)

(બ) વર્તુળ $x^2+y^2=a^2$ ને x-અક્ષની આજુબાજુ ઘુમાવતાં રચાતાં ગોલકનું ઘનફળ મેળવો. (૦૫)

અથવા

પ્ર.૫

(અ) પરવલય $y^2=4ax$ $(a>0)$ નાં શિરોબિંદુથી નાભિલંબના એક અંત્યબિંદુ સુધીની ચાપની લંબાઈ મેળવો. (૦૫)

(બ) કિંમત શોધોઃ (૦૫)

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x\sin^4 4x\, dx \qquad (2)\int \tan^6 x\, dx$$

પ્ર.૬

(અ) ધ્રુવીય સમીકરણ $r = f(\theta)$ માટે સાબિત કરો કે $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ (૦૫)

(બ) પ્રચલિત સંકેતમાં સાબિત કરો કે $\rho=\frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2}$ (૦૫)

અથવા

પ્ર.૬

(અ) $z = f(x,y)$ માટે ઓઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. (૦૫)

(બ) જો $z = x\,y\,f\left(\frac{y}{x}\right)$ અને z અચળ હોય તો સાબિત કરો કે (૦૫)

$$\frac{f'(y/x)}{f(y/x)} = \frac{x\left[y+x\frac{dy}{dx}\right]}{y\left[y-x\frac{dy}{dx}\right]}$$