SC

[115/A22]
Eng

SEAT No.________ No. of Printed Pages: 3

# Sardar Patel University, Vallabh Vidyanagar

B.Sc. Examinations: 2018-19 [NC, OLD COURSE 2010-2011]

Subject : Mathematics US01CMTH02 Max. Marks : 70

Calculus and Differential Equation

Date: 23/10/2018, Tuesday Timing: 02.00 pm - 04.00 pm

---

Q: 1. Answer the following by choosing correct answers from given choices. **10**

[1] If $y = \sin 3x$ then $y_{10} =$

[A] $3^{10}\sin 3x$ [B] $-3^{10}\sin 3x$ [C] $3^{10}\cos 3x$ [D] $-3^{10}\cos 3x$

[2] For $y = a^{mx}$, $y_n =$

[A] $n^m(\log a)^n a^{mx}$ [B] $m^n(\log a)^n a^{mx}$ [C] $m^n a^{mx}$ [D] $n^m a^{mx}$

[3] If $y = e^{4x} + e^{2x}$ then $y_n =$

[A] $e^{2x}(2^n e^{2x} + 1)$ [B] $2^n e^{2x}(2^n e^{2x} + 1)$ [C] $e^{2x}(2^n e^{2x} - 1)$ [D] none

[4] At a point on a curve, with non zero curvature, the radius of curvature and the curvature are

[A] Additive inverses of each other

[B] Multiplicative inverses of each other

[C] equal

[D] none

[5] For a polar curve $r = f(\theta)$ the radius of curvature at a point $(r, \theta)$ is given by

[A] $\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ [B] $\frac{(r^2 + {r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2{r_1}^2 - rr_2}$ [C] $\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ [D] $\frac{({r_1}^2 + {r_2}^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2{r_1}^2 - rr_2}$

[6] Intrinsic equation of a curve involves

[A] cartesian coordinates only [B] polar coordinates only

[C] parameteric cordinates only [D] none of these

[7] The degree of the homogeneous function $f(x, y) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ is

[A] 0 [B] 1 [C] -1 [D] 2

[8] If $z = x^4 \log\frac{x}{y}$ then $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$

[A] $2z$ [B] $3z$ [C] $4z$ [D] $12z$

[9] $y = px - x^2$ is

[A] a Clairaut's equation [B] solvable for $p$ [C] solvable for $y$ [D] none

[10] The angle at which an orthogonal trajectory to a family of curves intersect a member of the family is

[A] an acute angle [B] an obtuce Angle [C] right angle [D] none



(P.T.O.)

20

Q: 2. Answer TEN of the following.

[1] If $y = e^{3x}\cos 2x$ then find $y_3$

[2] If $y = x^7$ then find $y_7$

[3] If $y = \cos 3x - \sin 3x$ then find $y_4$

[4] If the radius of curvature at a point on a curve is 2 then find the curvature at the point.

[5] Define :(i) Curvature (ii) Radius of Curvature

[6] Let $y = f(x)$ be a cartesian representation of a curve $C$. Then prove that the length of arc of $C$ between two points $A$ and $B$ corresponding to the $x$-coordinates $a$ and $b$ respectively, is given by

$$arc\widehat{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

[7] Verify Euler's theorem for the function $z = \tan^{-1}\frac{x}{y}$

[8] Determine whether $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}{x^2 - y^2}$ is a homogeneous function or not.

[9] Find $\frac{dy}{dx}$ when $x\sin(x-y) - (x+y) = 0$

[10] Solve $y^2 - 2pxy + p^2(x^2 - 1) = m^2$

[11] Determine whether $x^3y.dx - xy^3.dy = 0$ is exact or not.

[12] Define :(i) Differential Equation Solvable for $y$
(ii) Differential Equation Solvable for $p$

Q: 3 [A] If the angle between radius vector and tangent at a point $(r,\theta)$on a polar curve $r = f(\theta)$ is $\phi$ then prove that $\tan\phi = \dfrac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$ 5

[B] Find the angle between radius vector and tangent at a point on the curve $r^m = a^m \cos m\theta$ 5

OR

Q: 3 [A] Find $y_n$ for $y = e^{2x}\cos x \sin^2 2x$ 5

[B] Let $y = (x^2 - 2)^m$. Find the value of $m$ such that $(x^2-2)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$. 5

Q: 4 [A] Define Rectification and show that entire length of the curve $x^2(a^2-x^2) = 8a^2y^2$ is $\pi a\sqrt{2}$ 10

OR

Q: 4 [A] Find the entire length of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 5

[B] Prove that if $\rho$ is the radius of curvature at any point P of the parabola $y^2 = 4ax$ and S is its focus then prove that $\rho^2 \propto SP^3$ 5

Q: 5 [A] State and prove Euler's theorem for functions of two variables. 5

[B] If $H = f(2x - 3y, 3y - 4z, 4z - 2x)$, then prove that

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

5

OR

Q: 5 [A] State and prove Euler's theorem for function of three variable 5

[B] If $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, then prove that

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2 = \left[\frac{\partial z}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial z}{\partial \theta}\right]^2.$$

5

Q: 6 [A] Prove that the necessary and sufficient condition for the differential equation $Mdx + Ndy = 0$ to be exact is that $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 5

[B] Solve : $(p + y + x)(xp + x + y)(p + 2x) = 0$ 5

OR

Q: 6 [A] Obtain the differential equation of orthogonal trajectories of a family of curves $f(x, y, c) = 0$. 5

[B] Find the orthogonal trajectories of family of parabolas $y^2 = 4a(x + a)$,where $a$ is the parameter 5

—X—

(115 & A-22)
ગુજ

No. of Printed Pages : 3

# Sardar Patel University, Vallabh Vidyanagar

B.Sc. Examinations: 2018-19 [NC, OLD COURSE 2010-2011]

Subject : Mathematics US01CMTH02 Max. Marks : 70

Calculus and Differential Equation

કલનશાસ્ત્ર અને વિકલસમીકરણો

Date: 23/10/2018, Tuesday Timing: 02.00 pm - 04.00 pm

---

પ્ર: 1. નીચે આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ને આપો 10

[1] જો $y = \sin 3x$ હોય તો $y_{10} =$
[A] $3^{10}\sin 3x$ [B] $-3^{10}\sin 3x$ [C] $3^{10}\cos 3x$ [D] $-3^{10}\cos 3x$

[2] જો $y = a^{mx}$ હોયતો , $y_n =$
[A] $n^m(\log a)^n a^{mx}$ [B] $m^n(\log a)^n a^{mx}$ [C] $m^n a^{mx}$ [D] $n^m a^{mx}$

[3] જો $y = e^{4x} + e^{2x}$ હોયતો $y_n =$
[A] $e^{2x}(2^n e^{2x} + 1)$ [B] $2^n e^{2x}(2^n e^{2x} + 1)$ [C] $e^{2x}(2^n e^{2x} - 1)$ [D] કોઈપણ નહીં

[4] કોઈ વક્ર ના શુન્યેતર વક્રતા ધરાવતા બિંદુ આગળ વક્રતાત્રિજ્યા અને વક્રતા
[A] એક બીજા ના સરવાળાના વ્યસ્ત થાય
[B] એક બીજા ના ગુણાકારના વ્યસ્ત થાય
[C] સમાન થાય
[D] કોઈપણ નહીં

[5] વક્ર $r = f(\theta)$ માટે બિંદુ $(r, \theta)$ આગળ વક્રતા ત્રિજ્યા _____ થી મેળવી શકાય
[A] $\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ [B] $\frac{(r^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2}$
[C] $\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ [D] $\frac{(r_1^2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2}$

[6] વક્રના સ્વાયત સમીકરણમાં કયા પ્રકારના યામનો ઉપયોગ થાયછે?
[A] કર્તેઝિય [B] ધ્રુવીય [C] પ્રાચલ [D] કોઈપણ નહીં

[7] સમપરિમાણ વિધેય $f(x, y) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ નું પરિમાણ ____ થાય.
[A] 0 [B] 1 [C] -1 [D] 2

[8] વિધેય $z = x^4 \log\frac{x}{y}$ માટે $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$
[A] $2z$ [B] $3z$ [C] $4z$ [D] $12z$

[9] વિકલ સમીકરણ $y = px - x^2$ ______ છે.
[A] ક્લેરોટનું સમીકરણ [B] $p$ માટે ઉકેલી શકાય તેવું
[C] $y$ માટે ઉકેલી શકાય તેવું [D] કોઈપણ નહીં

(1) (P.T.O)

[10] કોઈ વક્રસંહતિ નો વક્ર અને તેનો લંબછેદી વક્ર પરસ્પર એકબીજાને ___ ખૂણે છેદે.
[A] લઘુકોણ [B] ગુરૂકોણ [C] કાટકોણ [D] કોઈપણ નહીં

પ્ર: 2. નીચે આપેલા પ્રશ્નોમાથી કોઈ પણ 10 પ્રશ્નોનો ના જવાબ આપો **20**

[1] જો $y = e^{3x} \cos 2x$ હોયતો $y_3$ મેળવો.

[2] જો $y = x^7$ હોય તો $y_7$ મેળવો.

[3] વિધેય $y = \cos 3x - \sin 3x$ માટે $y_4$ મેળવો.

[4] જો કોઈ વક્ર પરના એક બિંદુ આગળ વક્રતાત્રિજ્યા 2 હોય તો તે બિંદુ આગળ ની વક્રતા શોધો.

[5] વ્યાખ્યા આપો : (i) વક્રતા (ii) વક્રતાત્રિજ્યા

[6] જો $y = f(x)$ એ કોઈ વક્ર $C$ નું કાર્તેઝિય સમીકરણ હોય અને $A$ અને $B$ વક્ર પરના એવા બે બિંદુઓ હોય જેના $x$ યામ અનુક્રમે $a$ અને $b$ હોયતો સાબિત કરોકે ચાપ $AB$ ની લંબાઈ $\widehat{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ થાય.

[7] વિધેય $z = \tan^{-1} \frac{x}{y}$ માટે ઓઈલરનું પ્રમેય લાગુ પડેછે કે નહીં તે ચકાસો.

[8] વિધેય $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}{x^2 - y^2}$ સમપરિમાણ છે કે નહીં તે ચકાસો.

[9] જો $x \sin(x-y) - (x+y) = 0$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

[10] ઉકેલ મેળવો : $y^2 - 2pxy + p^2(x^2-1) = m^2$

[11] વિકલ સમીકરણ $x^3y.dx - xy^3.dy = 0$ યથાર્થ છે કે નહીં તે ચકાસો.

[12] વ્યાખ્યા આપો : (i) $y$ માટે ઉકેલી શકાય તેવું વિકલ સમીકરણ
(ii) $p$ માટે ઉકેલી શકાય તેવું વિકલ સમીકરણ

પ્ર: 3 [A] વક્ર $r = f(\theta)$ પરના કોઈ બિંદુ $(r,\theta)$ આગળ ત્રિજ્યાસદીશ અને સ્પર્શક વચ્ચેનો ખૂણો જો $\phi$ હોય તો સાબિત કરોકે $\tan\phi = \dfrac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$ **5**

[B] આપેલ વક્ર માટે ત્રિજ્યાસદીશ અને સ્પર્શક વચ્ચે ના ખૂણાનું માપ મેળવો. $r^m = a^m \cos m\theta$ **5**

<u>અથવા</u>

પ્ર: 3 [A] વિધેય $y = e^{2x} \cos x \sin^2 2x$ માટે $y_n$ શોધો. **5**

[B] વિધેય $y = (x^2-2)^m$ માટે $m$ ની એવી કિંમત મેળવો કે જેથી $(x^2-2)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$. થાય. **5**

પ્ર: 4 [A] ચાપકલન ની વ્યાખ્યા આપો અને સાબિત કરોકે વક્ર $x^2(a^2-x^2) = 8a^2y^2$ ની સંપૂર્ણ લંબાઈ $\pi a\sqrt{2}$ છે. **10**



(PTO)

## <u>અથવા</u>

પ્ર: 4 [A] તારક વક્ર $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ની સંપૂર્ણ લંબાઈ શોધો. 5

[B] સાબિત કરોકે જો $S$ પરવલય $y^2=4ax$ ની નાભિ હોય અને પરવલયના કોઈ બિંદુ $P(x,y)$ આગળ વક્રતાત્રિજ્યા $\rho$ હોય તો $\rho^2 \propto SP^3$ થાય. 5

પ્ર: 5 [A] બે ચલ ના વિધેયો માટે ઓઈલર ના પ્રમેયનું વિધાન આપો અને તે સાબિત કરો. 5

[B] જો $H=f(2x-3y,3y-4z,4z-2x)$ હોયતો સાબિત કરોકે

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial z}=0.$$

5

## <u>અથવા</u>

પ્ર: 5 [A] ત્રણ ચાલના વિધેયો માટે ઓઈલરના પ્રમેયનું વિધાન આપો અને તે સાબિત કરો . 5

[B] જો $z=f(x,y)$ જ્યાં $x=r\cos\theta$ અને $y=r\sin\theta$ હોય તો સાબિત કરોકે

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2=\left[\frac{\partial z}{\partial r}\right]^2+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial z}{\partial \theta}\right]^2.$$

5

પ્ર: 6 [A] સાબિત કરોકે સમીકરણ $Mdx+Ndy=0$ યથાર્થ વિકલ સમીકરણ થાય તે માટેની જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરત $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ છે. 5

[B] વિકલ સમીકરણ $(p+y+x)(xp+x+y)(p+2x)=0$ નો ઉકેલ મેળવો. 5

## <u>અથવા</u>

પ્ર: 6 [A] વક્રસંહતિ $f(x,y,c)=0$ ના લમ્બછેદી વક્રો નું વિકલ સમીકરણ મેળવો . 5

[B] પરવલયો $y^2=4a(x+a)$, જ્યાં $a$ પ્રાચલ છે, ના લમ્બછેદી વક્રોનું સમીકરણ મેળવો. 5

—— X ——

(3)