Seat No.:________ No. of Printed Pages : 2

[98 Eng]

SARDAR PATEL UNIVERSITY

B.Sc. Semester-I

14^{th} November 2019 , Thursday

2:00 pm to 5:00 pm

US01CMTH21(Calculus)

Maximum Marks: 70

Q.1 Choose the correct option in the following questions, mention the correct option in the answerbook. [10]

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\, dx = ...$

(a) $\frac{63}{256}$ (b) $\frac{63}{512}$ (c) $\frac{63\pi}{512}$ (d) $\frac{63\pi}{256}$

(2) If eccentricity $e > 1$ then conic is :

(a) hyperbola (b) parabola (c) circle (d) ellipse

(3) The length L of arc of $y = f(x)$ between two points A and B corresponding to the x-coordinates a and b respectively, is given by $L = ...$

(a) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy$ (b) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (c) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ (d) $\int_a^b \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}}\, dx$

(4) Asymptotes of $y = \dfrac{2}{(x+1)(x-2)}$ are ....

(a) $x = 1, -2; y = 1$ (b) $x = -1, 2; y = 0$ (c) $x = 1, 2; y = 1$ (d) not possible

(5) Speed of $\bar{r} = 3\cos t\bar{i} + 3\sin t\bar{j} + t^2\bar{k}$ is :

(a) $\sqrt{9 - 4t^2}$ (b) $9 - 4t^2$ (c) $9 + 4t^2$ (d) $\sqrt{9 + 4t^2}$

(6) The 10^{th} derivative of a^{10x} is ....

(a) one (b) even (c) odd (d) zero

(7) The area of the surface S, generated by revolving the arc of the curve $y = f(x)$ between $x = a$ and $x = b$ about x-axis, is given by....

(a) $\int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (b) $\int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

(c) $\int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ (d) $\int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

(8) Volume by the Washer method is $V = ...$

(a) $\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx$ (b) $\pi\int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$ (c) $\pi\int_a^b (y_2^2 + y_1^2)\, dx$ (d) $\pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx$

(9) If $y = e^{ax}\cos(bx + c)$ then $y_n = ...$

(a) $r^n e^{ax}\cos(bx+c+n\phi)$ (b) $r^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos(bx+c+n\phi)$ (c) $r^n e^{ax}\cos(bx+c)$ (d) $r^n e^{ax}\cos(bx+c+\frac{n\pi}{2})$

(10) The n^{th} derivative of $\log x$ is:

(a) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^n}$ (c) $\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ (d) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-1}}$

Q.2 Attempt any **ten** in short: [20]

(1) Find $\frac{dy}{dx}$ when $x^y = y^x$.

(2) State when a polar curve is symmetric with respect to pole?

(3) Find the parametric equation for $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

(4) Find the length of the curve $r = 2\sin\theta$ from $\theta = 0$ to $\theta = \pi/2$.

(5) The line $x = 1 - y,\ 0 \le y \le 1$, is revolved about the y-axis to generate the cone. Find its surface area.

(6) Identify the curves: (i) $r = \dfrac{2}{1 + 3\sin\theta}$ (ii) $r = 5\cos 3\theta$.

(7) Express the point $(2, -40^0)$ in three other ways such that $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(8) Evaluate $\int \tan^6 x\, dx$.

(9) Evaluate $\int [\cos t\bar{i} + \bar{j} - 2t\bar{k}]\, dt$.

(10) Find the focus and directrix of the parabola $y^2 = 10x$.

(11) If $y = e^{mx}$, then prove that $y_n = m^n e^{mx}$.

(12) Derive the relation between polar and cartesian coordinates.

(PTO)

Q.3

(a) Find a, b, c so that $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ae^{x} - 2b\cos x + 3ce^{-x}}{x \sin x} = 2.$ [5]

(b) For $y = e^{ax}\cos(bx + c)$, then prove that $y_n = r^n e^{ax}\cos(bx + c + n\varphi)$, where $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. [5]

OR

Q.3

(c) State and Prove Leibniz's theorem. [5]

(d) Find semimajor axis,semiminor axis, center to focus distance,foci,vertices and center for the ellipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. [5]

Q.4

(a) State when a polar curve is symmetric with respect to normal axis. Prove it. [5]

(b) Sketch: $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x}$ [5]

OR

Q.4

(c) If a curve is given by $x = f(t); y = g(t)$ and that both x and y get numerically large as t approaches some number, say a. Then an oblique asymptote to the curve ,if it exist, is given by $y = mx + c$, where $m = \lim\limits_{t \to a} \dfrac{dy}{dx}$ and $c = \lim\limits_{t \to a}(y - mx)$. [5]

(d) Sketch: $r = 3 + 3\cos\theta$. [5]

Q.5

(a) The circle $x^2 + y^2 = a^2$ is rotated about the x-axis to generate the sphere . Find its volume. [5]

(b) Find the entire length of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. [5]

OR

Q.5

(c) Prove that the length of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ measured from $(0, a)$ to the point (x, y) is given by $\frac{3}{2}(ax^2)^{1/3}$. [5]

(d) The region bounded by the curve $y = \sqrt{4x - x^2}$, the x - axis and the line $x = 2$ is revolved about the x - axis . Find the volume of the solid by shell method . [5]

Q.6

(a) State and prove Euler's theorem for function of two variables. [5]

(b) Prove that if ρ is the radius of curvature at any point P of the parabola $y^2 = 4ax$ and S is its focus then prove that $\rho^2 \propto SP^3$. [5]

OR

Q.6

(c) For a polar equation $r = f(\theta)$ of a curve,prove that $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$. [5]

(d) If $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, then prove that $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2 = \left[\frac{\partial z}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial z}{\partial \theta}\right]^2$. [5]

—x—

[98 GUJ]

Seat No.:________

No. of Printed Pages: 2

સરદાર પટેલ વિશ્વવિદ્યાલય
બી.એસ.સી. સેમેસ્ટર–I પરીક્ષા
નવેમ્બર ૧૪, ૨૦૧૯, ગુરુવાર
૨.00 p.m. to ૫.00 p.m.
US01CMTH21 (Calculus)

Maximum Marks: 70

Q.1 નીચેના પ્રશ્નોમાં ખરો વિકલ્પ પસંદ કરીને તે વિકલ્પને તમારી ઉતરવાહીમાં લખો. [10]

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \, dx = ...$
(a) $\frac{63}{256}$ (b) $\frac{63}{512}$ (c) $\frac{63\pi}{512}$ (d) $\frac{63\pi}{256}$

(2) જો ઉત્કેન્દ્રતા $e < 1$ હોય તો શાંકવ .... હસે.
(a) અતિવલય (b) પરવલય (c) વર્તુળ (d) ઉપવલય

(3) બિંદુઓ A અને B ના x યામો અનુક્રમે a અને b હોય તો વક્ર $y = f(x)$ ની બિંદુઓ A અને B વચ્ચે ની લંબાઈ $L =$ ......
(a) $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy$ (b) $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (c) $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ (d) $\int_a^b \sqrt{1+\frac{dy}{dx}}\, dx$

(4) વક્ર $y = \dfrac{2}{(x+1)(x-2)}$ નો અસંપ્તોસ .... થાય.
(a) $x = 1, -2; y = 1$ (b) $x = -1, 2; y = 0$ (c) $x = 1, 2; y = 1$ (d) અશક્ય

(5) સદીસ $\bar{r} = 3\cos t\bar{i} + 3\sin t\bar{j} + t^2\bar{k}$ ની ગતિ :
(a) $\sqrt{9-4t^2}$ (b) $9-4t^2$ (c) $9+4t^2$ (d) $\sqrt{9+4t^2}$

(6) વિધેય a^{10x} નું 10^{th} વિકલન ....
(a) એક (b) બેકી સંખ્યા (c) એકી સંખ્યા (d) શૂન્ય

(7) વક્ર $y = f(x)$ ને $x = a$ અને $x = b$ વચ્ચે અને x અક્ષ ની આસપાસ ગુમાવવા થી સરફેસ S મળસે , તે નું ક્ષેત્રફળ ...... થાય.
(a) $\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (b) $\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
(c) $\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ (d) $\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

(8) વોશર ની રીત થી ઘનફળ $V =$ ....
(a) $\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx$ (b) $\pi\int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$ (c) $\pi\int_a^b (y_2^2 + y_1^2)\, dx$ (d) $\pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx$

(9) જો $y = e^{ax}\cos(bx+c)$ તો $y_n =$ ......
(a) $r^n e^{ax}\cos(bx+c+n\phi)$ (b) $r^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos(bx+c+n\phi)$ (c) $r^n e^{ax}\cos(bx+c)$ (d) $r^n e^{ax}\cos(bx+c+\frac{n\pi}{2})$

(10) વિધેય $\log x$ નું n^{th} મુ વિકલન :
(a) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^n}$ (c) $\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ (d) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-1}}$

Q.2 નીચેનામાંથી કોઈ પણ દસ ના ઉતર લખો. [20]

(1) જો $x^y = y^x$ હોઈ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.
(2) પોલર વક્ર પોલ ની સાપેક્ષ સિમેટ્રિક ક્યારે થાઈ છે તે લખો.
(3) સમીકરણ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ નું પેરામેટ્રિક ફોર્મ શોધો.
(4) વક્ર $r = 2\sin\theta$ ની લંબાઈ $\theta = 0$ થી $\theta = \pi/2$ સુધી શોધો.
(5) રેખા $x = 1 - y,\ 0 \le y \le 1$ એ y- યક્ષ ની આસપાસ ફરવા થી કોન બને છે. તેનો સરફેસ નું છેત્રફળ શોધો.
(6) વક્ર (i) $r = \dfrac{2}{1+3\sin\theta}$ (ii) $r = 5\cos 3\theta$ ને ઓળખો..
(7) પોલર ફોર્મ માં બિંદુ $(2, -40^0)$ ને બીજી ત્રણ રીતે દર્શાવો કે જેથી $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.
(8) શોધો : $\int \tan^6 x\, dx$.
(9) શોધો : $\int [\cos t\bar{i} + \bar{j} - 2t\bar{k}]\, dt$.
(10) પરવલય $y^2 = 16x$ નું ફોકસ અને ડિરેક્ટરીક્ષ શોધો.
(11) જો $y = e^{mx}$, તો સાબિત કરો કે $y_n = m^n e^{mx}$.
(12) પોલર અને કાર્તેસિયાન યામો વચ્ચે નો સબંધ તારવો.

(PTO)

Q.3

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{ae^{x} - 2b\cos x + 3ce^{-x}}{x\sin x} = 2$ માટે a, b, c નું મૂલ્ય શોધો. [5]

(b) જો $y = e^{ax}\cos(bx + c)$, હોઈ તો સાબિત કરો કે $y_n = r^n e^{ax}\cos(bx + c + n\varphi)$,
જ્યાં $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. [5]

OR

Q.3

(c) લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. [5]

(d) આપેલ ઉપવલય $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ની સેમિમેજર અક્ષ , સેમિમાઇનોર અક્ષ , કેન્દ્ર , કેન્દ્ર થી ફોકસ નું અંતર ,ફોકસ અને વરટેક્ષ શોધો. [5]

Q.4

(a) પોલર સમીકરણ નોર્મલ અક્ષ સાપેક્ષ સિમેટ્રિક ક્યારે થાય તે સરતો લખો અને સાબિત કરો. [5]

(b) વક્ર $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x}$ નો આલેખ દોરો. [5]

OR

Q.4

(c) જો વક્ર $x = f(t); y = g(t)$ માં x અને y ખૂબ જ મોટા હોય જયારે t એ a ની નજીક હોઈ, તો ઓબ્લિક અસેંપ્તોસ નું સમીકરણ $y = mx + c$ થાય તેમ બતાવો જ્યાં $m = \lim_{t\to a} \frac{dy}{dx}$ and $c = \lim_{t\to a}(y - mx)$. [5]

(d) વક્ર $r = 3 + 3\cos\theta$ નો આલેખ દોરો. [5]

Q.5

(a) આપેલ વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ ને x અક્ષ ની આસપાસ ગુમાવવા થી ગોલક બને છે. આ ગોલક નું ઘનફળ શોધો. [5]

(b) એસ્ટ્રોઈડ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ની સંપૂર્ણ લંબાઈ શોધો . [5]

OR

Q.5

(c) સાબિત કરો કે વક્ર $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ની લંબાઈ બિંદુ $(0, a)$ થી બિંદુ (x, y) સુધી ની $\frac{3}{2}(ax^2)^{1/3}$ છે. [5]

(d) વક્ર $y = \sqrt{4x - x^2}$, x અક્ષ અને રેખા $x = 2$ ને x અક્ષ ની આસપાસ ગુમાવવા થી સોલીડ બને છે. શેલ ની રીત થી સોલીડ નું ઘનફળ શોધો. [5]

Q.6

(a) ઓઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. [5]

(b) જો ρ એ પરવલય $y^2 = 4ax$ ઉપર ના બિંદુ P આગળ નું રડીયસ ઓફ કરવેચર હોઈ અને S એ ફોકસ હોઈ તો સાબિત કરો કે $\rho^2 \propto SP^3$. [5]

OR

Q.6

(c) પોલાર સમીકરણ $r = f(\theta)$ માટે બતાવો કે $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$. [5]

(d) જો $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, તો સાબિત કરો કે $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2 = \left[\frac{\partial z}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial z}{\partial \theta}\right]^2$. [5]

—x—