Seat No.: __________

81/A-34
Eng

SARDAR PATEL UNIVERSITY

No. of pages: 03

B.Sc. (I-Semester) (NC) EXAMINATION 2019

Wednesday, 13th November

02:00pm-04:00pm

US01CMTH 02-Mathematics

Calculus and Differential Equations

Total Marks: 70

Q: 1 Answer the following by selecting the correct answer from the given options: [10]

1. $y = e^{ax}cosbx$ then y_n =-----------
   a. $r^ne^{ax}cos(bx+c)$ b. $r^ne^{ax}cos(bx+n\phi)$ c. $r^ne^{ax}cos(bx+c+n\phi)$ d. $e^{ax}cos(bx+n\phi)$
2. If $r = a(1+cos\theta)$, then $tan\phi$ = -----------
   a. $tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ b. $cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ c. $-cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ d. $-tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
3. If $y = e^{m\cos^{-1}x}$ then $\sqrt{1-x^2}\ y_1$ = -----------
   a. my b. m^2y c. $-y$ d. $-my$
4. The radius of curvature of the curve $S = a\psi$ is -------------
   a. $\frac{(1+a^2)}{a}$ b. a c. 0 d. None of these
5. Intrinsic equation of a curve involves --------- coordinates.
   a. Cartesian b. Polar c. Parametric d. None of these
6. For the curve $y = f(x)$ the radius of curvature at a given point is given by
   a. $\frac{(1+{y_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$ b. $\frac{(r^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2{r_1}^2-rr_2}$ c. $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ d. None of these
7. $f(x,y) = \frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}}{x^3+y^3}$ is a homogeneous function of degree ------------
   a. $-\frac{14}{5}$ b. $\frac{5}{3}$ c. $\frac{14}{5}$ d. $\frac{5}{6}$
8. $u = \log\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ then $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ is --------
   a. -1 b. e^u c. 1 d. None of these
9. The general solution of the differential equation $y = Px + \frac{3}{P}$ is -------
   a. $y^3 = cx^2 + \frac{3}{c}$ b. $xy = c(x+y) - \frac{1}{c}$ c. $y = cx + \frac{3}{c}$ d. None of these
10. The solution of $p - y = 0$ is y =
    a. ce^x b. e^x c. $clogx$ d. $\frac{c}{x}$

[P. T. O.]

Q: 2 Answer in brief of the following questions. *(Any Ten)* **[20]**

1. If $y = e^x - \log(7x-5)$, then find y_3.
2. If $r = a(1-cos\theta)$, then find ϕ.
3. If $y = cos3x$, then find y_4.
4. Find the value θ at the point of intersection of $r = a(1-cos\theta)$ and $r = acos\theta$.
5. Find the radius of curvature at any point on the curve $S = 8asin^2\left(\frac{\psi}{6}\right)$.
6. For the curve $y = asin2x$, find $\frac{ds}{dx}$.
7. If $u = x^3 - 3xy^2$, then prove that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
8. Verify Euler's theorem for the function $u = \frac{xy}{x+y}$.
9. Determine whether $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}$ is a homogeneous function or not ?
10. Solve: $sinpxcosy = cospxsiny + p$.
11. Determine whether $(ax + hy + g)$dx + (hx + by + f)dy = 0 is exact or not?
12. Solve: $p^2 + 4p + 4 = 0$.

Q: 3 (a) State and prove Leibnizs' theorem. **[5]**

(b) If $y = cos(\log x)$, then prove that $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$ **[5]**

OR

Q: 3 (a) If ϕ is an angle between radius vector and tangent for the curve $r = f(\theta)$ at any point (r,θ) then prove that $tan\phi = r/\frac{dr}{d\theta}$. **[5]**

(b) Find angle between radius vector and tangent at a point on the curve $r^m = a^m cosm\theta$. **[5]**

Q: 4 (a) Define radius of curvature. Prove that the radius of curvature for the curve $r = f(\theta)$ is given by

$$\rho = \frac{(r^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2{r_1}^2-rr_2}.$$ **[10]**

OR

Q: 4 (a) Prove that ρ is the radius of curvature at any point P on the parabola $y^2 = 4ax$ and S is its focus, then prove that $\rho^2 \propto SP^3$. **[5]**

(b) Find the length of the arc of the curve $x = e^t sint, y = e^t cost$ from $t = o$ to $t = \frac{\pi}{2}$. **[5]**

[P.T.O.]

Q: 5 (a) State and prove Euler's theorem. [5]

(b) If $z = f(x,y)$ where $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, then prove that $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ [5]

OR

Q: 5 (a) If $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ then prove that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$ [5]

(b) Verify Euler's theorem for $z = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$. [5]

Q: 6 (a) Prove that the necessary and sufficient condition for the differential equation $Mdx + Ndy = 0$ to be exact is that $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ [5]

(b) Solve: $y = \sin p - p\cos p$ [5]

OR

Q: 6 (a) Find orthogonal trajectories of the semi-cubic parabolas $ay^2 = x^3$, where a is the parameter. [5]

(b) Solve: $p^2 + 5p + 6 = 0$. [5]

— X —

Seat No.: ________

81/A-34
GUJ

SARDAR PATEL UNIVERSITY

B.Sc. (I-Semester) (NC) EXAMINATION 2019
Wednesday, 13th November
02:00pm-04:00pm
US01CMTH 02-Mathematics
Calculus and Differential Equations

No. of pages: 03

Total Marks: 70

Q: નીચે આપેલા પ્રશ્ન ના જવાબ યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ને આપો. **[10]**

1. જો $y = e^{ax}cosbx$ તો y_n =-----------

   a. $r^n e^{ax}cos(bx + c)$ b. $r^n e^{ax}cos(bx + n\phi)$ c. $r^n e^{ax}cos(bx + c + n\phi)$ d. $e^{ax}cos(bx + n\phi)$

2. જો $r = a(1 + cos\theta)$તો $tan\phi$ = ----------

   a. $tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ b. $cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ c. $-cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ d. $-tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

3. જો $y = e^{m\cos^{-1}x}$ તો $\sqrt{1-x^2}y_1$ = -----------

   a. my b. m^2y c. $-y$ d. $-my$

4. વક્ર $S = a\psi$ ની વક્રતા-ત્રિજ્યા ----------- છે.

   a. $\frac{(1+a^2)}{a}$ b. a c. 0 d. કોઈ પણ નહી.

5. વક્ર ના સ્વાયત્ત સમીકરણ મા --------- પ્રકાર ના યામ નો ઉપયોગ થાય છે.

   a. કરતેજિયન b. ધ્રુવીય c. પ્રચલ d. કોઈ પણ નહી.

6. વક્ર $y = f(x)$ માટે આપેલ બિંદુ આગળ વક્રતા-ત્રિજ્યા ---------- થી મેળવી શકાય છે.

   a. $\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$ b. $\frac{(r^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_1^2-rr_2}$ c. $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ d. કોઈ પણ નહી.

7. સમ-પરિમાણ વિધેય $f(x,y) = \frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}}{x^3+y^3}$ નું પરિમાણ ------------ થાય.

   a. $-\frac{14}{5}$ b.. $\frac{5}{3}$ c. $\frac{14}{5}$ d. $\frac{5}{6}$

8. જો $u = \log\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ તો $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ --------

   b. -1 b. e^u c. 1 d. કોઈ પણ નહી.

9. વિકલ-સમીકરણ $y = Px + \frac{3}{P}$ નો સામાન્ય ઉકેલ -------- છે.

   a. $y^3 = cx^2 + \frac{3}{c}$ b. $xy = c(x + y) - \frac{1}{c}$ c. $y = cx + \frac{3}{c}$ d.. કોઈ પણ નહી.

10. વિકલ-સમીકરણ નો $p - y = 0$ ઉકેલ -------- છે.

    a. ce^x b. e^x c. $clogx$ d. $\frac{c}{x}$

[P. T. O.]

Q: 2 નીચે આપેલા પ્રશ્ન ના ટુંક મા જવાબ આપો. *(કોઈ પણ દસ)* **[20]**

1. જો $y = e^x - \log(7x-5)$ હોય તો y_3 મેળવો.

2. જો $r = a(1-cos\theta)$ હોય તો ϕ શોધો.

3. જો $y = cos3x$ હોય તો y_4 મેળવો.

4. વક્ર $r = a(1-cos\theta)$ અને $r = acos\theta$ ના છેદ-બિંદુ આગળ θ શોધો.

5. વક્ર $S = 8asin^2\left(\frac{\psi}{6}\right)$ ના કોઇપણ બિંદુ આગળ ની વક્રતા-.ત્રિજ્યા શોધો

6. વક્ર $y = asin2x$ માટે $\frac{ds}{dx}$ શોધો

7. જો $u = x^3 - 3xy^2$ તો સાબિત કરો $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

8. વિધેય $u = \frac{xy}{x+y}$ માટે ઓઈલરનું પ્રમેય ચકાશો.

9. વિધેય $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}$ સમ-પરિમાણ છે કે નહિ ચકાસો.

10. ઉકેલો: $sinpxcosy = cospxsiny + p$.

11. સમીકરણ $(ax + hy + g)\mathrm{dx} + (\mathrm{hx} + \mathrm{by} + \mathrm{f})\mathrm{dy} = 0$ યથાર્થ છે કે નહિ ચકાસો.

12. ઉકેલો: $p^2 + 4\mathrm{p} + 4 = 0.$

Q: 3 (a) લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **[5]**

(b) જો $y = cos(\log x)$ તો સાબિત કરો કે $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$ **[5]**

OR

Q: 3 (a) વક્ર $r = f(\theta)$ પર ના કોઈ પણ બિંદુ (r,θ) આગળ ત્રિજ્યા સદિશ અને સ્પર્શક વચ્ચે નો ખૂણો ϕ હોય તો

સાબિત કરો કે $tan\phi = r/\frac{dr}{d\theta}.$ **[5]**

(b) આપેલ વક્ર $r^m = a^m cosm\theta$ માટે ત્રિજ્યા-સદિશ અને સ્પર્શક વચ્ચે નો ખૂણો શોધો. **[5]**

Q: 4 (a) વક્રતા-ત્રિજ્યા ની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે વક્ર $r = f(\theta)$ની વક્રતા-ત્રિજ્યા

$$\rho = \frac{(r^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_1^2-rr_2}.$$ **[10]**

[P.T.O.]

OR

Q: 4 (a) સાબિત કરો કે જો S પરવલય $y^2 = 4ax$ ની નાભિ હોય અને પરવલય ના કોઈપણ બિંદુ P આગળ વક્રતા-ત્રિજ્યા ρ હોય તો $\rho^2 \propto SP^3$. **[5]**

(b) વક્ર $x = e^t sint$, $y = e^t cost$ ની $t = o$ થી $t = \frac{\pi}{2}$ સુધી ના ચાપ -લંબાઈ શોધો. **[5]**

Q: 5 (a) ઓઈલર નું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **[5]**

(b) જો $z = f(x, y)$ $x = rcos\theta, y = rsin\theta$ હોય તો

સાબિત કરો કે $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ **[5]**

OR

Q: 5 (a) જો $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. **[5]**

(b) $z = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ માટે ઓઈલરનું પ્રમેય ચકાશો. **[5]**

Q: 6 (a) સાબિત કરો કે સમીકરણ $Mdx + Ndy = 0$ યથાર્થ વિકલ-સમીકરણ થાય તે માટે ની જરૂરી અનેપર્યાપ્ત શરત $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ છે. **[5]**

(b) ઉકેલો: $y = sinp - pcosp$ **[5]**

OR

Q: 6 (a) અર્ધ સમઘનીય પરવલય $ay^2 = x^3$ ના લંબછેદીય વક્ર નું સમીકરણમેળવો, જ્યાં a પ્રચલ છે. **[5]**

(b) ઉકેલો: $p^2 + 5p + 6 = 0$. **[5]**

— X —