



SEAT No. _____

No. of Printed Pages: 6

[A-6]
E+G

Sardar Patel University, Vallabh Vidyanagar

B.Sc. - Semester- II : Examinations : 2022-23 [NC]

Subject : Mathematics

US02CMTH02

Max. Marks : 70

Matrix Algebra and Differential Equations

Date: 23/09/2022, Friday

Timing: 09.30 am - 11.30 am

Instruction : The symbols used in the paper have their usual meaning, unless specified.

Q: 1. Answer the following by choosing correct answers from given choices.

10

[1] For a square matrix A over \mathbb{R} the matrix $A - A'$ is
 [A] symmetric [B] skew symmetric [C] hermitian [D] skew hermitian

[2] The elements of principal diagonal of a skew symmetric matrix are equal to
 [A] -1 [B] 0 [C] 1 [D] none

[3] Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is a _____ matrix.
 [A] scalar [B] diagonal [C] symmetric [D] skew-symmetric

[4] If 3 is a characteristic root of A then
 [A] $|I + 3A|=0$ [B] $|I - 3A|=0$ [C] $|A + 3I|=0$ [D] $|A - 3I|=0$

[5] If λ is a characteristic root of A then the matrix $A - \lambda I$ is
 [A] orthogonal [B] non-singular [C] singular [D] hermitian

[6] Matrix $P = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}$ is
 [A] orthogonal [B] singular [C] non-singular [D] none

[7] $\frac{1}{D^2 + 4} e^{-2x} =$
 [A] $\frac{x^2}{2!} e^{-2x}$ [B] $-\frac{x^2}{2!} e^{-2x}$ [C] $\frac{1}{8} e^{-2x}$ [D] $-\frac{1}{8} e^{-2x}$

[8] Complementary function of $(D^2 - 4D + 4)y = e^x$ is
 [A] $(c_1 x + c_2) e^{2x}$ [B] $(c_1 + c_2) e^{2x}$
 [C] $e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ [D] $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

[9] $\frac{1}{D^2 + m^2} \sin mx =$
 [A] $\frac{x}{2m} \cos mx$ [B] $-\frac{x}{2m} \cos mx$ [C] $-\frac{x}{2m} \sin mx$ [D] $\frac{x}{2m} \sin mx$

[10] $\frac{1}{f(D)} x \cos 2x =$
 [A] $\left[x - \frac{1}{f'(D)} f(D) \right] \frac{1}{f'(D)} \cos 2x$ [B] $\left[x + \frac{1}{f'(D)} f(D) \right] \frac{1}{f'(D)} \cos 2x$
 [C] $\left[x - \frac{1}{f(D)} f'(D) \right] \frac{1}{f(D)} \cos 2x$ [D] $\left[x + \frac{1}{f(D)} f'(D) \right] \frac{1}{f(D)} \cos 2x$

Q: 2. In the following, depending on the type of question either fill in the blank or answer whether a statement is true false

08

[1] Traspose of $\begin{bmatrix} 5 & 5-i \\ 4i & -2 \end{bmatrix}$ is

[2] Determinant value of $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$ is

[3] Matrix $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ is a non-singular matrix. (TRUE/FALSE?)

[4] $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ is a skew-symmetric matrix. (TRUE/FALSE?)

[5] Complementary function for $(D^2 - 2D - 3)y = \sin x$ is

[6] $\frac{1}{(D-5)^3} e^{7x} = \dots\dots\dots$

[7] Particular solution of $(D^3)y = \sin 2x$ is

[8] Particular solution of $D^4y = x^5$ is

Q: 3. Answer any TEN of the following.

20

[1] Define : (i) Scalar Matrix (ii) Unit Matrix

[2] Define : (i) Square Matrix (ii) Principal Diagonal

[3] For $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ show that $AA' = I$

[4] Determine whether $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 8 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ is singular or non-singular.

[5] Find the characterstic roots of $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

[6] Define : (i) Non-singular Matrix (ii) Characteristic Equation of a Matrix

[7] Find the complementary function of $(D^3 - 3D^2 + 2D)y = \cos 2x$

[8] Find the complementary function of $(D - 2)^5y = e^{15x}$

[9] If y_1 and y_2 are two solutions of linear differential equation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_n y = 0$$

and c_1 and c_2 are two arbitrary constants, then show that $c_1 y_1 + c_2 y_2$ is also a solution of the differential equation

- [10] Find the particular integral of $(D + 1)y = x^2$.
- [11] Find the particular integral of $(D^4 + D^2)y = \sin 4x$.
- [12] Find the complementary function of $(5 - 2D)^2y = \cos 2x$.

Q: 4. Attempt any FOUR of the following.

- [1] Prove that every square matrix can be expressed in one and only one way as a sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix.

- [2] For $A = \begin{bmatrix} 0 & 2m & n \\ l & m & -n \\ l & -m & n \end{bmatrix}$, where $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = \frac{1}{\sqrt{6}}$ and $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ show that $AA' = I$

- [3] State and prove *Cayley-Hamilton theorem*

- [4] Find the characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ and verify that it is satisfied by A and hence obtain A^{-1} .

- [5] Obtain the rule for finding the particular integral of $f(D)y = e^{mx}$ where m is a constant

- [6] Solve : $(D^2 - 3D + 5)y = e^{-x}$

- [7] In usual notations prove that $\frac{1}{f(D)}e^{ax}V = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V$, where V is a function of x

- [8] Solve : $(D^2 - 2D + 1)y = x^2e^{3x}$

SEAT No. _____



Sardar Patel University, Vallabh Vidyanagar

B.Sc. - Semester- II : Examinations : 2022-23 [NC]

Subject : Mathematics

US02CMTH02

Max. Marks : 70

Matrix Algebra and Differential Equations

શ્રેણિક અને વિકલ સમીકરણો

Date: 23/09/2022, Friday

Timing: 09.30 am - 11.30 am

સૂચના : પ્રશ્નપત્રમાં ઉપયોગ થયેલ સંજ્ઞાઓ માટે જ્યાં સ્પષ્ટતા કરેલ ન હોય ત્યાં તેનો પ્રચલિત અર્થ કરવો.

10

પ્ર: 1. નીચે આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ને આપો

[1] R પરના શ્રેણિક A માટે $A - A'$ _____ છે.
[A] સંમિત શ્રેણિક [B] વિસંમિત શ્રેણિક [C] હર્મિશીયન [D] સ્ક્યુ - હર્મિશીયન

[2] વાસ્તવિક વિસંમિત શ્રેણિક ના અગ્રવિકર્ણ પરનો પ્રત્યેક સભ્ય _____ બરાબર હોય.
[A] -1 [B] 0 [C] 1 [D] કોઈપણ નહીં

[3] શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ _____ શ્રેણિક છે.
[A] અદીશ [B] વિકર્ણ [C] સંમિત [D] વિસંમિત

[4] શ્રેણિક A નું એક લાક્ષણિક બીજ 3 હોય તો
[A] $|I + 3A| = 0$ [B] $|I - 3A| = 0$ [C] $|A + 3I| = 0$ [D] $|A - 3I| = 0$

[5] જો λ એ શ્રેણિક A નું એક લાક્ષણિક બીજ હોય તો શ્રેણિક $A - \lambda I$ _____ છે.
[A] લંબ [B] સામાન્ય [C] અસામાન્ય [D] હર્મિશીયન

[6] શ્રેણિક $P = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}$ એ _____ છે
[A] લંબ શ્રેણિક [B] અસામાન્ય શ્રેણિક [C] સામાન્ય શ્રેણિક [D] કોઈપણ નહીં

[7] $\frac{1}{D^2 + 4} e^{-2x} =$
[A] $\frac{x^2}{2!} e^{-2x}$ [B] $-\frac{x^2}{2!} e^{-2x}$ [C] $\frac{1}{8} e^{-2x}$ [D] $-\frac{1}{8} e^{-2x}$

[8] વિકલ સમીકરણ $(D^2 - 4D + 4)y = e^x$ ના ઉકેલમાં પૂરક વિધેય _____ થાય.
[A] $(c_1 x + c_2) e^{2x}$ [B] $(c_1 + c_2) e^{2x}$
[C] $e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ [D] $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

[9] $\frac{1}{D^2 + m^2} \sin mx =$
[A] $\frac{x}{2m} \cos mx$ [B] $-\frac{x}{2m} \cos mx$ [C] $-\frac{x}{2m} \sin mx$ [D] $\frac{x}{2m} \sin mx$

[10] $\frac{1}{f(D)} x \cos 2x =$

[A] $\left[x - \frac{1}{f'(D)} f(D) \right] \frac{1}{f'(D)} \cos 2x$ [B] $\left[x + \frac{1}{f'(D)} f(D) \right] \frac{1}{f'(D)} \cos 2x$
 [C] $\left[x - \frac{1}{f(D)} f'(D) \right] \frac{1}{f(D)} \cos 2x$ [D] $\left[x + \frac{1}{f(D)} f'(D) \right] \frac{1}{f(D)} \cos 2x$

પ્ર: 2. નીચેના પ્રશ્નો ના જવાબ ખાલી જગ્યા પૂરી અથવા જો સૂચવેલ હોય તો વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે પ્રમાણે આપો.

08

[1] $\begin{bmatrix} 5 & 5-i \\ 4i & -2 \end{bmatrix}$ નો પરિવર્ત શ્રેણિક _____ થાય.

[2] $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$ ના નિશ્ચાયક ની કિંમત _____ થાય.

[3] શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ સામાન્ય શ્રેણિક છે. (સત્ય કે મિથ્યા?)

[4] શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ વીસંમિત શ્રેણિક છે. (સત્ય કે મિથ્યા?)

[5] $(D^2 - 2D - 3)y = \sin x$ નું પૂરક વિધેય _____ છે.

[6] $\frac{1}{(D-5)^3} e^{7x} =$ _____.

[7] વિકલ સમીકરણ $(D^3)y = \sin 2x$ નું વિશિષ્ટ સંકલ _____ છે.

[8] વિકલ સમીકરણ $D^4y = x$ નું વિશિષ્ટ સંકલ _____ છે.

પ્ર: 3. નીચે આપેલા પ્રશ્નોમાથી કોઈ પણ દશ પ્રશ્નોનો ના જવાબ આપો

20

[1] વ્યાખ્યા આપો: (i) અદીશ શ્રેણિક (ii) એકમ શ્રેણિક

[2] વ્યાખ્યા આપો: (i) વિસંમિત શ્રેણિક (ii) અગ્ર વિકર્ણ

[3] શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ માટે $AA' = I$ થાય તેમ સાબિત કરો.

[4] શ્રેણિક $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 8 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ સામાન્ય છે કે અસમાન્ય તે ચકાસો.

[5] શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક બીજ મેળવો.

[6] વ્યાખ્યા આપો : (i) સામાન્ય શ્રેણિક (ii) શ્રેણિકનું લાક્ષણિક સમીકરણ

[7] $(D^3 - 3D^2 + 2D)y = \cos 2x$ માટે પૂરક વિધેય મેળવો.

[8] વિકલ સમીકરણ $(D - 2)^5 y = e^{15x}$ માટે પૂરક વિધેય મેળવો.

[9] જો વિકલ સમીકરણ

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_n y = 0$$

ના ઉકેલ y_1 અને y_2 હોય અને c_1 અને c_2 બે અનિયત અચળાંકો હોય તો સાબિત કરો કે $c_1 y_1 + c_2 y_2$ પણ સમીકરણ નો એક ઉકેલ છે .

[10] વિકલ સમીકરણ $(D + 1)y = x^2$ નું વિશિષ્ટ સંકલ મેળવો.

[11] વિશિષ્ટ સંકલ મેળવો : $(D^4 + D^2)y = \sin 4x$.

[12] વિકલ સમીકરણ $(5 - 2D)^2 y = \cos 2x$ માટે પૂરક વિધેય મેળવો.

પ્ર: 4. કોઈ પણ ચાર પ્રશ્નો ના જવાબ આપો.

32

[1] સાબિત કરો કે પ્રત્યેક ચોરસ શ્રેણિક એક અને માત્ર એકજ રીતે કોઈ સંમિત શ્રેણિક અને વિસંમિત શ્રેણિક ના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

[2] જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 2m & n \\ l & m & -n \\ l & -m & n \end{bmatrix}$, જ્યાં $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = \frac{1}{\sqrt{6}}$ and $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય તો સાબિત કરો કે $AA' = I$

[3] કેલી-હેમિલ્ટન નું પ્રમેય જણાવો અને સાબિત કરો.

[4] શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો અને A તે સમીકરણ નું સમાધાન કરે છે કે નહીં તે ચકાસો. ઉપરાંત A^{-1} પણ શોધો.

[5] વિકલ સમીકરણ $f(D)y = e^{mx}$, જ્યાં m અચળ છે, માટે વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવવા માટે નું સૂત્ર મેળવો.

[6] ઉકેલ મેળવો : $(D^2 - 3D + 5)y = e^{-x}$

[7] પ્રચલિત સંકેતો માં સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D)} e^{ax} V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$, જ્યાં V ચલ x નું કોઈ વિધેય છે.

[8] ઉકેલ મેળવો : $(D^2 - 2D + 1)y = x^2 e^{3x}$

—X—