m

SEAT No.__________

[68]
E+CR

No of printed page : 4

SARDAR PATEL UNIVERSITY
B.Sc.(SEMESTER - II) EXAMINATION - 2022
Wednesday, 27th April 2022 MATHEMATICS: US02CMTH51
(Elementary Algebra)

Time : 12:00 Noon to 02:00 p.m. Maximum Marks : 70

Que.1 Fill in the blanks. (10)

(1) $(cis\theta)^{\frac{21}{9}}$ has only .... distinct value.
(a) 9 (b) 21 (c) 7 (d) 3

(2) $i\tan ix =$................
(a) $\tan x$ (b) $i\tanh x$ (c) $-\tanh x$ (d) $-\tan ix$

(3) If $z = cis\theta$ and $\frac{1}{z} = cis(-\theta)$ then $z^p - \frac{1}{z^p} =$ ....
(a) $2i\sin p\theta$ (b) $-2i\sin p\theta$ (c) $2i\cos p\theta$ (d) 0

(4) Function $f : Z \to Z$ defined by $f(x) = x + 5$ is ....
(a) not oneone (b) not onto (c) bijection (d) None of these

(5) Function $f : A \to A$ is called ....on A .
(a) linear (b) operator (c) matrix (d) None of these

(6) If $(a, m) = d$ then $ax \equiv b(mod\ m)$ has solution iff ....
(a) d/b (b) b/d (c) $d = b$ (d) none

(7) For the system $AX = B$, if the $rank(A) \neq rank(A|B)$ then the system is ....
(a) consistent (b) inconsistent (c) may be both (d) none

(8) If A is a non singular matrix of order n then rank of A is ....
(a) $n - 1$ (b) n (c) 1 (d) 0

(9) The matrix $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ is ....
(a) Scalar matrix (b) Identity matrix (c) unit matrix (d) None

(10) Characteristic roots of the Identity matrix I of order 2 are ....
(a) $1, -1$ (b) $1, 1$ (c) $0, 1$ (d) $-1, -1$

Que.2 Write TRUE or FALSE. (8)

(1) Amplitude of $-\sqrt{3} + i$ is 150° .

(2) $\sinh x = -i\sin x$.

(3) Function $f : N \to N$ defined by $f(x) = 2x$ is not onto.

(4) $A \times B$ is trivial relation from A to B.

(5) If A is an orthogonal matrix then A^{-1} is equal to A

(6) If A is a square matrix then $A + A'$ is Symmetric.

(7) The constant term of the characteristics polynomial $|A - xI|$ of A is Adj. A.

(8) The characteristic root of a real Skew- symmetric matrix is either zero or pure imaginary number.

(P.T.O.)

Que.3 Attempt the following (Any TEN) (20)

(1) Find the 7th roots of unity .

(2) Prove that $\sinh^{-1} z = log[z + \sqrt{z^2+1}]$

(3) Separate the real and imaginary parts of $\sin(x + iy)$

(4) Show that the congruence $x + 50 \equiv 39 (mod\ 7)$ possesses a solution.

(5) Let $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Let the function $f : A \to R$ is defined by $f(x) = x^2 + 1$. Find the range of f .

(6) Define one one and onto functions.

(7) If A is Hermitian,then prove that $B^{\Theta}AB$ is Hermitian.

(8) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ then check whether $(AB)^T = B^T A^T$.

(9) If A and B are two orthogonal matrices then prove that AB and BA are also orthogonal .

(10) Find Characteristic polynomial of a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(11) Solve the system of equations $x + 3y - 2z = 0;\ 2x - y + 4z = 0;\ x - 11y + 14z = 0$

(12) Prove that the characteristic roots of a Hermitian matrix are all real .

Que.4 Attempt the following (Any FOUR) (32)

(1) State and prove De-Moivres theorem .

(2) If $\tan(\theta + i\phi) = e^{i\alpha}$ then prove that $\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$ and $\phi = \frac{1}{2}\log\ \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

(3) Let f be a function defined from the set X to the set Y and let A, B be the subsets of Y, then prove that
(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ (ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(4) If R and S are two equivalence relations on a set A then prove that $R \cap S$ is also an equivalence relation on A .

(5) Using Gauss-Jordan Method find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(6) Convert $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$ into its equivalent reduced row echelon form and hence find the rank of the matrix A.

(7) State and prove Cayley-Hamilton theorem. Also using it find inverse of non singular matrix.

(8) Find the characteristic roots and corresponding characteristic vectors of $\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SEAT No.________

[68]
E+5

SARDAR PATEL UNIVERSITY

B.Sc.(SEMESTER - II) EXAMINATION - 2022

Wednesday, 27th April 2022 MATHEMATICS: US02CMTH51

(Elementary Algebra)

No of printed page : 4

Time : 12:00 Noon to 02:00 p.m. Maximum Marks : 70

....

પ્રશ્ન. ૧ ખાલી જગ્યા પૂરો. (10)

(1) $(cis\theta)^{\frac{21}{9}}$ ને ફક્ત .... અલગ મૂલ્યો છે
(a) 9 (b) 21 (c) 7 (d) 3

(2) $i\tan ix =$................
(a) $\tan x$ (b) $i\tanh x$ (c) $-\tanh x$ (d) $-\tan ix$

(3) જો $z = cis\theta$ અને $\frac{1}{z} = cis(-\theta)$ હોય તો $z^p - \frac{1}{z^p} =$ ....
(a) $2i\sin p\theta$ (b) $-2i\sin p\theta$ (c) $2i\cos p\theta$ (d) 0

(4) વિધેય $f : Z \to Z$ માટે $f(x) = x + 5$ છે તો તે .... થાય
(a) એક એક નથી (b) વ્યાપ્ત નથી (c) બાયજેક્શન (d) એક પણ નઈ

(5) વિધેય $f : A \to A$ ને A પર .... કેહવાય .
(a) રેખીય (b) ઓપરેટર (c) શ્રેણિક (d) એક પણ નઈ

(6) જો $(a, m) = d$ હોય તો $ax \equiv b(mod\, m)$ ને ઉકેલ મડે જો .... થાય
(a) d/b (b) b/d (c) $d = b$ (d) એક પણ નઈ

(7) સિસ્ટમ $AX = B$,માટે જો $rank(A) \neq (A|B)$ હોય તો સિસ્ટમ .... છે.
(a) સુસંગત (b) અસંગત (c) બંને હોઈ શકે છે (d) એક પણ નઈ

(8) જો A એ n ઓર્ડર નો નોન સિંગૂલર શ્રેણિક હોય , તો A નો રેન્ક .... છે
(a) $n-1$ (b) n (c) 1 (d) 0

(9) શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .... છે
(a) સ્કેલર શ્રેણિક (b) ઓળખ શ્રેણિક (c) એકમ શ્રેણિક (d) એક પણ નઈ

(10) 2 ઓર્ડર ના ઓળખ શ્રેણિક I ના લાક્ષણિક મૂલ્યો .... છે
(a) $1, -1$ (b) $1, 1$ (c) $0, 1$ (d) $-1, -1$

પ્રશ્ન. ૨ TRUE અથવા FALSE લખો. (05)

(1) $-\sqrt{3} + i$ નો માન 150° થાય .

(2) $\sinh x = -i\sin x$.

(3) વિધેય $f : N \to N$ માટે $f(x) = 2x$ એ વ્યાપ્ત વિધેય નથી .

(4) $A \times B$ એ A થી B વચ્ચે નું ત્રિવિયલ રીલેસન છે .

(5) જો A ઓર્થોગોનલ શ્રેણિક હોય તો A^{-1} એ શ્રેણિક A બરાબર થાય

(પાછળ જુઓ)

૩

(6) જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય તો $A + A'$ સંમીત શ્રેણિક થાય .

(7) A ની બહુપદી $|A - xI|$ લાક્ષણિકતાઓનો અચળ Adj. A છે.

(8) વાસ્તવિક વિસમમિત શ્રેણિક નું લાક્ષણિક મૂલ્ય કાંતો શૂન્ય અથવા શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.

પ્રશ્ન. ૩ નીચેના પ્રશ્નના જવાબ આપો. (ગમે તે દશ) **(20)**

(1) એક ના 7th મૂલ્યો શોધો

(2) સાબિત કરો કે $\sinh^{-1} z = log[z + \sqrt{z^2 + 1}]$

(3) $\sin(x + iy)$ ના વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગોને અલગ કરો.

(4) બતાવો કે એકરૂપતા $x + 50 \equiv 39(mod\ 7)$ પાસે ઉકેલ છે.

(5) જો $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ અને વિધેય $f : A \to R, f(x) = x^2 + 1$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય તો f ની શ્રેણી (range) શોધો .

(6) એક એક અને વ્યાપ્ત વિધેયો ની વ્યાખ્યાઆપો.

(7) જો A હર્મિસિયાન હોય તો સાબિત કરો કે $B^{\Theta}AB$ પણ હર્મિસિયાન છે .

(8) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ હોય તો તપાસો $(AB)^T = B^T A^T$.

(9) જો A અને B બે ઓર્થોગોનલ શ્રેણિકો હોય તો સાબિત કરો કે AB અને BA પણ ઓર્થોગોનલ થાય .

(10) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ની લાક્ષણિકતા બહુપદી (Characteristic polynomial) શોધો

(11) સમીકરણોની સિસ્ટમ ઉકેલો $x + 3y - 2z = 0;\ 2x - y + 4z = 0; x - 11y + 14z = 0$

(12) સાબિત કરો કે હર્મિસિયાન શ્રેણિક ના લાક્ષણિક મૂલ્યો બધા વાસ્તવિક છે .

પ્રશ્ન. ૪ નીચેના પ્રશ્નના જવાબ આપો. (ગમે તે ચાર) **(32)**

(1) ડી-મોઇવ્રેસ નું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો .

(2) જો $\tan(\theta + i\phi) = e^{i\alpha}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$ અને $\phi = \frac{1}{2}\log\ \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

(3) જો R અને S સમૂહ A પર બે સમાનતા સંબંધ છે તો તે સાબિત કરો $R \cap S$ એ A પર સમાનતા સંબંધ પણ છે.

(4) વિધેય f સેટ X અને Y વચ્ચે વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે અને A, B સેટ Y ના ઉપગણો છે તો સાબિત કરો કે
(૧) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ (૨) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(5) ગૌસ-જોર્ડન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત (inverse) શોધો.

(6) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$ ને રિડ્યુસ રો ઇક્લોન સ્વરુપ્ મા ફેરવો તથા A ની રેંક શોધો.

(7) કેલે-હેમિલ્ટન પ્રમેય જણાવો અને સાબિત કરો. તેનો ઉપયોગ કરીને નોન સિંગૂલર શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શોધો.

(8) શ્રેણિક $\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને અનુરૂપ લાક્ષણિકતા વેક્ટર શોધો

—— X ——