Seat No. : ____________ **SARDAR PATEL UNIVERSITY** No. of pages: 4

[9/A-4]

B.Sc. (I-Semester) ON DEMAND EXAMINATION 2022

Friday, 23th September

09:30am-11:30am

US01CMTH 02-Mathematics

Calculus and Differential Equations

Total Marks: 70

Note: Figures to the right indicates full marks of question.

Q: 1 Answer the following by selecting the correct answer from the given options: **[10]**

1. $y = e^{mx}$ then y_n =-----------

   a. e^{mx} b. me^{mx} c. $n^m e^{mx}$ d. $m^n e^{mx}$

2. If $r = a(1 - cos\theta)$, then $tan\phi$ = -----------

   a. $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ b. $\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ c. $-\frac{\theta}{2}$ d. $\frac{\theta}{2}$

3. If $y = (x^2 - 2)^m$ then $(x^2 - 2)y_1$ = -----------

   a. $2my$ b. mxy c. $2mx$ d. $2mxy$

4. If $x = a(\theta + sin\theta)$, $y = a(1 - cos\theta)$ then y_1 = -----------

   a. $tan\frac{\theta}{2}$ b. $\frac{tan\theta}{2}$ c. $cot\frac{\theta}{2}$ d. $-tan\frac{\theta}{2}$

5. The radius of the curvature of the curve $s = a\psi$ is ---------

   a. $\frac{(1+a^2)}{a}$ b. a c. 0 d. None of these

6. The cardioid $r = a(1 + cos\theta)$ and the circle $r = -acos\theta$ intersect at point with value of θ=---------

   a. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ b. $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ c. $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ d. $0, \frac{2\pi}{3}$

7. $z = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ is a homogeneous function of degree -------------

   a. 1 b. 2 c. -1 d. 0

8. $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2y^2}{x+y}\right)$ then $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ is --------

   a. $tanu$ b. $2tanu$ c. $3tanu$ d. $2cotu$

9. The general solution of the differential equation $y = Px + \frac{3}{P}$ is --------

   a. $y^3 = cx^2 + \frac{3}{c}$ b. $xy = c(x + y) - \frac{1}{c}$ c. $y = cx + \frac{3}{c}$ d. None of these

10. The solution of $p - y = 0$ is y =

    a. ce^x b. e^x c. $clogx$ d. $\frac{c}{x}$

Q: 2 Do as directed: **[08]**

(1) If $x = cos\left[\frac{1}{m}logy\right]$ then $y(0) =$ ----------------

(2) If $\frac{2a}{r} = 1 + cos\theta$ then $\frac{dr}{d\theta} =$ -----------

(3) True or False: Curvature of the line $2x + 3y = 12$ is 0.

(4) True or False: Rectification is a process measuring the length of arc on a curve.

(5) True or False: $z = 3x^2y - 4xy^2$ is homogeneous function of degree 2.

(6) True or False: If $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ then $f_y = \frac{2x}{(x+y)^2}$

(7) A differential equation $Mdx + Ndy = 0$ is exact if--------

(8) For $xdx + ydy + \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$ then N=-----------

Q: 3 Answer in brief of the following questions. ***(Any Ten)*** **[20]**

1. If $y = sin(2x - 3) + cos(5x + 1)$, then find y_7.
2. If $r^m = a^m cosm\theta$, then find ϕ.
3. If $y = x^7$, then find y_7.
4. Find the length of curve $y = coshx$ measured from $(0,1)$ to $(1, e)$.
5. Find the radius of curvature at any point on the curve $S = 8asin^2\left(\frac{\psi}{6}\right)$.
6. In usual notation prove that $arcAB = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
7. If $u = x^3 - 3xy^2$, then prove that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
8. Verify Euler's theorem for the function $u = ax^2 + 2hxy + by^2$.
9. Determine whether $f(x,y) = \frac{4x^2y^2+5xy^3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ is a homogeneous function or not? if so find its degree.
10. Solve: $P^2 - 2Pxy + P^2(x^2 - 1) = m^2$
11. Determine whether $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$ is exact or not?
12. Find orthogonal trajectories of family of curve $y = cx$ where c is parameter.

Q: 4 Attempt any Four of the following: **[32]**

(1) State and prove Leibnizs' theorem.

(2) If ϕ is an angle between radius vector and tangent for the curve $r = f(\theta)$ at any point (r, θ) then prove that $tan\phi = r/\frac{dr}{d\theta}$

(3) Prove that the radius of curvature for the curve $r = f(\theta)$ is given by $\rho = \frac{(r^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2{r_1}^2-rr_2}$

(4) For the cycloid $x = a(\theta + sin\theta), y = a(1 - cos\theta)$, prove that $\rho = 4acos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Also show that ${\rho_1}^2 + {\rho_2}^2 = 16a^2$, where ρ_1 and ρ_2 are radius of curvature at points where the tangents are perpendicular.

(5) State and prove Euler's theorem.

(6) If $H = f(2x - 3y, 3y - 4z, 4z - 2x)$ then prove that $\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial z} = 0$

(7) Obtain the necessary and sufficient condition for equation $Mdx + Ndy = 0$ is exact.

(8) Solve: $(P + x + y)(xP + x + y)(P + 2x) = 0$

Seat No. : __________

SARDAR PATEL UNIVERSITY

No. of pages: 4

B.Sc. (I-Semester) ON DEMAND EXAMINATION 2022

Friday, 23th September

09:30am-11:30am

US01CMTH 02-Mathematics

Calculus and Differential Equations

Total Marks: 70

Note: Figures to the right indicates full marks of question.

Q: 1 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ આપો. **[10]**

1. જો $y = e^{mx}$ તો $y_n =$-----------
   a. e^{mx} b. me^{mx} c. $n^m e^{mx}$ d. $m^n e^{mx}$
2. જો $r = a(1 - cos\theta)$, તો $tan\phi =$ -----------
   a. $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ b. $\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ c. $-\frac{\theta}{2}$ d. $\frac{\theta}{2}$
3. જો $y = (x^2 - 2)^m$ તો $(x^2 - 2)y_1 =$ -----------
   a. $2my$ b. mxy c. $2mx$ d. $2mxy$
4. જો $x = a(\theta + sin\theta)$, $y = a(1 - cos\theta)$ તો $y_1 =$ -----------
   a. $tan\frac{\theta}{2}$ b. $\frac{tan\theta}{2}$ c. $cot\frac{\theta}{2}$ d. $-tan\frac{\theta}{2}$
5. વક્ર $s = a\psi$ ની વક્રતા-ત્રિજ્યા -------- છે.
   a. $\frac{(1+a^2)}{a}$ b. a c. 0 d. એક પણ નહિં
6. ચક્રજ $r = a(1 + cos\theta)$ અને વર્તુળ $r = -acos\theta$ ના છેદબિંદુ આગળ θ=---------
   a. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ b. $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ c. $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ d. $0, \frac{2\pi}{3}$
7. સમ-પરિમાણિય વિધેય $z = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ નું પરિમાણ -------------
   a. 1 b. 2 c. -1 d. 0
8. જો $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2y^2}{x+y}\right)$ તો $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} =$ --------
   a. $tanu$ b. $2tanu$ c. $3tanu$ d. $2cotu$
9. વિકલ સમીકરણ $y = Px + \frac{3}{P}$ નો સામાન્ય ઉકેલ--------
   a. $y^3 = cx^2 + \frac{3}{c}$ b. $xy = c(x + y) - \frac{1}{c}$ c. $y = cx + \frac{3}{c}$ d. એક પણ નહિં
10. વિકલ સમીકરણ $p - y = 0$ નો ઉકેલ $y =$
   a. ce^x b. e^x c. $clogx$ d. $\frac{c}{x}$

Q: 2 માગ્યા પ્રમાણે જવાબ આપો. **[08]**

(1) જો $x = cos\left[\frac{1}{m}logy\right]$ તો $y(0) =$ ----------------

(2) જો $\frac{2a}{r} = 1 + cos\theta$ તો $\frac{dr}{d\theta} =$ -----------

(3) સાચું કે ખોટું જણાવો: સુરેખા $2x + 3y = 12$ ની વક્રતા 0 છે.

(4) સાચું કે ખોટું જણાવો: એ વક્ર ની લંબાઇ માપવા માટે ની પદ્ધતિ છે.

(5) સાચું કે ખોટું જણાવો: $z = 3x^2y - 4xy^2$ એ 2 પરિમાણ વાળું સમ-પરિમાણિય વિધેય છે.

(6) સાચું કે ખોટું જણાવો: જો $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ તો $f_y = \frac{2x}{(x+y)^2}$

(7) જો વિકલ સમીકરણ $Mdx + Ndy = 0$ એ યથાર્થ થાય તો --------

(8) સમીકરણ $xdx + ydy + \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$ માટે $N=$-----------

Q: 3 નીચેના પ્રશ્ન ના ટૂંક માં જવાબ આપો. (કોઈ પણ દસ) **[20]**

1.જો $y = sin(2x - 3) + cos(5x + 1)$, તો y_7 શોધો.

2.જો $r^m = a^m cosm\theta$, તો ϕ શોધો.

3.જો $y = x^7$, તો y_7 શોધો.

4.વક્ર $y = coshx$ ની $(0,1)$થી $(1,e)$ સુધી ની લંબાઇ શોધો.

5. વક્ર $S = 8asin^2\left(\frac{\psi}{6}\right)$ ની કોઇ પણ બિંદુ આગળ વક્રતા-ત્રિજ્યા શોધો.

6.પ્રચલિત સંકેત મા સાબિત કરો કે $arcAB = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

7.જો $u = x^3 - 3xy^2$, તો સાબિત કરો કે $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

8. વિધેય $u = ax^2 + 2hxy + by^2$ માટે ઓઇલર નું પ્રમેય ચકાશો.

9.વિધેય $f(x,y) = \frac{4x^2y^2+5xy^3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ સમ-પરિમાણિય છે? જો હોય તો તેનું પરિમાણ શોધો.

10. ઉકેલો: $P^2 - 2Pxy + P^2(x^2 - 1) = \mathrm{m}^2$

11. સમીકરણ $(ax + hy + g)\mathrm{dx} + (\mathrm{hx} + \mathrm{by} + \mathrm{f})\mathrm{dy} = 0$ યથાર્થ છે ?

12. વક્ર –સહંતિ $y = cx$ ના લંબચ્છેદીય વક્રનું સમીકરણ શોધો, જ્યાં c પ્રાચલ છે.

Q: 4 કોઈ પણ ચારના વિસ્તૃત જવાબ આપો. **[32]**

(1) લાયબ્નીઝ નું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(2) વક્ર $r = f(\theta)$ ના કોઇ પણ બિંદુ(r,θ) આગળ ત્રિજ્યા સદિશ અને સ્પશક વચ્ચે નો ખૂણો ϕ હોય તો સાબિત કરો કે $tan\phi = r/\frac{dr}{d\theta}$

(3) સાબિત કરો કે વક્ર $r = f(\theta)$ ની વક્રતા-ત્રિજ્યા $\rho = \frac{(r^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_1^2-rr_2}$ છે.

(4) ચક્રજ$x = a(\theta + sin\theta), y = a(1 - cos\theta)$, માટે સાબિત કરો કે $\rho = 4acos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. ઉપરાંત બતાવો કે ${\rho_1}^2 + {\rho_2}^2 = 16a^2$, જ્યાં ρ_1 અને ρ_2 એ પરસ્પર લંબ સ્પશકો આગળ ની વક્રતા-ત્રિજ્યા છે .

(5) ઓઇલર નું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(6) જો $H = f(2x - 3y, 3y - 4z, 4z - 2x)$ તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial z} = 0$

(7) વિકલ સમીકરણ $Mdx + Ndy = 0$ યથાર્થ થાય તે માટે ની જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરત મેળવો.

(8) ઉકેલો:$(P + x + y)(xP + x + y)(P + 2x) = 0$