Uni. Seat No: _______

[46/A-16 E-14]

No. of Printed Pages: 04

SARDAR PATEL UNIVERSITY

Bachelor of Science (Semester 1) Examination-2022

US01CMTH51: CALCULUS

Date: 13-12-2022 (Tuesday)

Time: 02:00 P. M. to 05:00 P. M.

Total Marks: 70

Note: (1) Figure to the right indicate full marks of the questions.

(2) All questions are compulsory.

Q:1 Answer the following by selecting correct choice from the given options. (10)

(1) $\frac{d}{dx}$ (tanh x) = _________.

(a) sech^2 x (b) $-\text{sech}^2$ x (c) sech x · tanh x (d) None of the above

(2) If y = $(ax+b)^{-1}$ then y_n = __________.

(a) $\frac{(-1)^{n-1}\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$

(c) $\frac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ (d) None of the above

(3) $\lim_{x\to 0}(cotx)^{sin2x}$ is______ form.

(a) 0^0 (b) 1^∞ (c) ∞^0 (d) ∞^∞

(4) Asymptotes of y = $x^3 - 3x^2 + 2x$ are ______.

(a) x = 0, 1, 2 ; y = 1 (b) x = 0, -1, 2 ; y = 0 (c) x = 0, 1, -2 (d) Not possible

(5) The curve r = 3cos4θ has ______ loops.

(a) 1 (b) 8 (c) 2 (d) 4

(6) Parametric equation for circle $x^2 + y^2 = a^2$ are_______.

(a) x = a secθ, y = b tanθ (b) x = a cosθ, y = b sinθ

(c) x = a cosθ, y = a sinθ (d) None of the above

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{10}x\ dx$ = ______, (n∈ N).

(a) $\frac{63}{256}$ (b) $\frac{63}{512}$ (c) $\frac{63\pi}{512}$ (d) None of the above

(8) y=f(x) is a differentiable function on [a, b], then the length of arc of C between Two points A and B corresponding to the X-coordinates a and b respectively is _______.

(a) $\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\, dy$ (b) $\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\, dx$

(c) $\int_a^b \pi y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\, dx$ (d) None of the above

(9) $f(x, y) = x^4y^4 - x^5y^3 + x^6y^2$ is a homogeneous function of degree _______.

(a) 4 (b) 8 (c) 2 (d) 6

(10) If u = $x^3 - 3xy^2$, then $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ = _______.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

Q:2 Answer the following questions in short. (Any Ten) (20)

(1) Obtain derivatives of ($\cosh^{-1}$ x).

(2) If y = a^{mx} then find y_n, Where a ∈ R-{1}, m ∈ R.

(P.T.O.)

(3) Evaluate: $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$.

(4) Discuss symmetries about X-axis and Y-axis for curve $y = \frac{4-x^2}{x^2-9}$.

(5) Find the parametric equation of $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

(6) Transfer the equation $r = \tan\theta \cdot \sec\theta$ in Cartesian form.

(7) Evaluate: $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$.

(8) Find the length of curve y = cosh x measured from (0, 1) to (1, e).

(9) Find the Curvature of the line 2x + 3y = 1.

(10) Verify Euler's theorem for $Z = 3x^2y - 4xy^2$.

(11) Find $\frac{dy}{dx}$ for the implicit function $x^y = y^x$.

(12) Find the degree of homogeneous function $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}$.

Q:3 (A) State and prove Leibniz's theorem. (5)

(B) If $x = \cos\left(\frac{1}{m}\log_e y\right)$ then prove that $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+m^2)y_n = 0$. (5)

OR

(A) Find integral $\int \operatorname{cosech} x \, dx$. (5)

(B) Evaluate: $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{\cot^2 x}{2}\right)$. (5)

Q:4 (A) Sketch the curve $y = \frac{2}{(x+1)(x-2)}$. (5)

(B) In usual notations prove that $r = \frac{pe}{1 \pm e\cos\theta}$. (5)

OR

(A) State when a polar curve is symmetry with respect to polar axis? Also prove it. (5)

(B) Sketch the polar curve $r = 2 + \cos\theta$ (5)

Q:5(A) Obtain Reduction formulae for $I_n = \int \sin^n x \, dx$ and $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n dx$,

Where n ∈ N. (6)

(B) Evaluate $\int_0^2 x^3 \sqrt{2x - x^2} \, dx$. (4)

OR

(A) Find the entire length of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (6)

(B) Find the radius of curvature ρ for the polar curve $r = a(1 + \cos\theta)$. (4)

Q:6(A) State and prove Euler's Theorem for the homogeneous function Z = *f(x,y)*. (5)

(B) If $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 y^2}{x+y}\right)$, then prove that (1) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3\tan u$

(2) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3\tan u\,(3\sec^2 u - 1)$. (5)

OR

(A) If *H = f(2x-3y, 3y-4z, 4z-2x)*, then prove that $\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial z} = 0$. (5)

(B) If $Z = xy\,f\left(\frac{y}{x}\right)$ and Z is constant, then show that (5)

$\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{f\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x\left[y + x\frac{dy}{dx}\right]}{y\left[y - x\frac{dy}{dx}\right]}$.

Uni. Seat No: ______

No. of Printed Pages: ____

SARDAR PATEL UNIVERSITY

Bachelor of Science (Semester 1) Examination-2022

US01CMTH51: CALCULUS

Date: 13-12-2022 (Tuesday)

Time: 02:00 P. M. to 05:00 P. M.

Total Marks: 70

Note: (1) પ્રશ્નોની જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નોના ગુણભાર દર્શાવે છે.

(2) બધા પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

Q:1 નીચેના પ્રશ્નોના સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ આપો. **(10)**

(1) $\frac{d}{dx}$(tanh x) = __________ .

(a) $sech^2 x$ (b) $-sech^2 x$ (c) sech x · tanh x (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(2) જો y = $(ax+b)^{-1}$ હોય તો y_n = __________.

(a) $\frac{(-1)^{n-1}\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$

(c) $\frac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(3) $\lim_{x\to 0}(cotx)^{sin2x}$ નું સ્વરૂપ ______ છે.

(a) 0^0 (b) 1^∞ (c) ∞^0 (d) ∞^∞

(4) y = $x^3 - 3x^2 + 2x$ ના અનંત સ્પર્શકો ______ છે.

(a) x = 0, 1, 2 ; y = 1 (b) x = 0, -1, 2 ; y = 0 (c) x = 0, 1, -2 (d) શક્ય નથી

(5) વક્ર r = 3cos4θ ને ______ ગાળા છે.

(a) 1 (b) 8 (c) 2 (d) 4

(6) વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ ના પ્રાચલ સમીકરણો ______ છે.

(a) x = a secθ, y = b tanθ (b) x = a cosθ, y = b sinθ

(c) x = a cosθ, y = a sinθ (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{10} x \; dx$ = ______, (n∈ N).

(a) $\frac{63}{256}$ (b) $\frac{63}{512}$ (c) $\frac{63\pi}{512}$ (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(8) જો y=f(x) એ [a, b] પર વિકલનીય હોય તો વક્ર C પર આવેલા બે બિંદુઓ A અને B વચ્ચેના ચાપની લંબાઈ ______ છે, જ્યાં a અને b અનુક્રમે બિંદુઓ A અને B ના X-યામ છે.

(a) $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy$ (b) $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

(c) $\int_a^b \pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(9) સમપરિમાણિય વિધેય *f(x, y)* = $x^4y^4 - x^5y^3 + x^6y^2$ નું પરિમાણ ______ છે.

(a) 4 (b) 8 (c) 2 (d) 6

(10) જો u = $x^3 - 3xy^2$ હોય તો $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ = ______.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

Q:2 નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો. (કોઈપણ દસ) **(20)**

(1) ($cosh^{-1}$ x) નું વિકલન મેળવો.

(2) જો y = a^{mx} હોય તો y_n મેળવો, જ્યાં a ∈ R-{1}, m ∈ R.

(P.T.O.)

(3) મૂલ્ય મેળવો: $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$.

(4) વક્ર $y = \frac{4-x^2}{x^2-9}$ ની X-અક્ષ અને Y-અક્ષ વિશે સંમિતતા ચર્ચો.

(5) વક્ર $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ના પ્રાચલ સમીકરણો મેળવો.

(6) $r = \tan\theta \cdot \sec\theta$ નું કાર્ટેઝીયન સમીકરણ મેળવો.

(7) સંકલન $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$ મેળવો.

(8) વક્ર $y = \cosh x$ ની (0, 1) થી (1, e) સુધીની ચાપ લંબાઈ શોધો.

(9) સુરેખા $2x + 3y = 1$ ની વક્રતા શોધો.

(10) વિધેય $Z = 3x^2y - 4xy^2$ માટે ઑયલરનું પ્રમેય ચકાસો.

(11) ગૂઢ વિધેય $x^y = y^x$ માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

(12) સમપરિમાણિય વિધેય $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}$ નું પરિમાણ શોધો.

Q:3(A) લીબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. (5)

(B) જો $x = \cos(\frac{1}{m}\log_e y)$ હોય તો સાબિતકરો કે $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+m^2)y_n = 0$. (5)

OR

(A) સંકલન $\int \operatorname{cosech} x \, dx$ મેળવો. (5)

(B) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{2x^2} - \frac{\cot^2 x}{2})$ નું મૂલ્ય મેળવો. (5)

Q:4 (A) વક્ર $y = \frac{2}{(x+1)(x-2)}$ નું આલેખન કરો. (5)

(B) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે $r = \frac{pe}{1 \pm e\cos\theta}$. (5)

OR

(A) ધ્રુવિય વક્ર ધ્રુવિય અક્ષને સંમિત ક્યારે કહેવાય ? તે જણાવી, સાબિત પણ કરો. (5)

(B) ધ્રુવિય સમીકરણ $r = 2 + \cos\theta$ નું આલેખન કરો. (5)

Q:5(A) લઘુકરણ સૂત્રો $I_n = \int \sin^n x \, dx$ અને $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n dx$ મેળવો, જ્યાં $n \in N$. (6)

(B) $\int_0^2 x^3 \sqrt{2x - x^2} \, dx$ ની કિંમત મેળવો. (4)

OR

(A) તારક $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ની સંપૂર્ણ લંબાઈ શોધો. (6)

(B) ધ્રુવીય વક્ર $r = a(1 + \cos\theta)$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા ρ શોધો. (4)

Q:6(A) સમપરિમાણીય વિધેય $Z = f(x,y)$ માટે ઑયલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. (5)

(B) જો $u = \sin^{-1}(\frac{x^2 y^2}{x+y})$ હોય તો સાબિ કરો કે (1) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3\tan u$

(2) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3\tan u\,(3\sec^2 u - 1)$. (5)

OR

(A) જો $H = f(2x-3y, 3y-4z, 4z-2x)$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial z} = 0$. (5)

(B) જો $Z = xy\,f(\frac{y}{x})$ અને Z અચળ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{f'(\frac{y}{x})}{f(\frac{y}{x})} = \frac{x\,[y+x\frac{dy}{dx}]}{y\,[y-x\frac{dy}{dx}]}$. (5)

----------✂----------