Seat No: _______ No. of Printed Pages: 4

[32] (E 36)

SARDAR PATEL UNIVERSITY

Bachelor of Science (Semester 1) Examination-2022

US01CMTH21: CALCULUS

Date: **10-12-2022**, Saturday Total Marks: **70**

Time: 02:00 P. M. to 05:00 P. M.

Note:(1) Figure to the right indicate full marks of the questions.

(2) All questions are compulsory.

Q:1 Answer the following by selecting correct choice from the given options. (10)

(1) Domain of cosech x is ______.

(a) R (b) R - {0} (c) Z (d) N

(2) If y = sin(ax+b) then y_n = __________.

(a) a^n sin(ax+b) (b) $a^n \sin(ax+n\frac{\pi}{2})$

(c) $a^n \sin(ax+b+n\frac{\pi}{2})$ (d) None of the above

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x}$ is______ form.

(a) $\frac{0}{0}$ (b) 1^∞ (c) $\frac{\infty}{\infty}$ (d) None of the above

(4) The curve $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ has _______ branches.

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) None of the above

(5) If eccentricity e=1 then conic is______.

(a) Hyperbola (b) Parabola (c) Circle (d) Ellipse

(6) Equation of a cycloid is_______.

(a) $x = a(\theta-\sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ (b) $x = a(1-\sin\theta)$, $y = a(\theta-\cos\theta)$

(c) $x = a(\theta-\sin\theta)$ (d) None of the above

(7) $\int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$ = ______, (n∈ N).

(a) $\frac{1}{n-1} - J_{n-2}$ (b) $\frac{1}{n+1} - J_{n-2}$ (c) $\frac{1}{n} - J_{n-2}$ (d) None of the above

(8) y=f(x) is a differentiable function on [a, b], then the length of arc C between Two points A and B corresponding to the X-coordinates a and b respectively is _______.

(a) $\int_a^b \sqrt{1+ (\frac{dy}{dx})^2}\, dy$ (b) $\int_a^b \sqrt{1+ (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$

(c) $\int_a^b \pi y \sqrt{1+ (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$ (d) None of the above

(9) $f(x, y) = x^4y^4 - x^5y^3 + x^6y^2$ is a homogeneous function of degree _______.

(a) 4 (b) 6 (c) 2 (d) 8

(10) If $u = x^3 - 3xy^2$, then $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ = ______.

(a) 6y (b) -6x (c) -6y (d) None of the above

Q:2 Answer the following questions in short. (Any Ten) (20)

(1) Obtain derivative of (tanh x).

(2) If $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$ then find y_4.

(3) Find the focus of the parabola $y^2 = 10x$.

(4) Discuss symmetries about X-axis and Y-axis for the curve $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x}$.

(5) Find the parametric equation of $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

(6) Express the point $(3, 40^0)$ in three other ways such that $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

(7) Find the Curvature of the line $2x + 3y = 1$.

(8) Find the length of curve $y = \cosh x$ measured from (0, 1) to (5, e).

(9) Evaluate: $\int tan^3x\ sec^3x\ dx$.

(10) If $\bar{r}(t) = (\cos t)\,i + (\sin t)\,j + t\,k$, then find $\lim_{t \to \pi/4} \bar{r}(t)$.

(11) Find polar equation of conic if directrix passes through the point $(5, 0^0)$. and $e = 1$

(12) Find the degree of homogeneous function $f(x,y) = \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y}}{x^3 + y^3}$.

Q:3(A) State and prove Leibniz's theorem. (5)

(B) If $y = (x - \sqrt{4 + x^2})^m$ then prove that $(4+x^2)\,y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$. (5)

OR

(A) Find the derivative of $y = cosech^{-1}x$. (5)

(B) Evaluate: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tanx}{x}\right)^{\frac{5}{3x^2}}$. (5)

Q:4(A) Sketch the curve $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$. (5)

(B) Sketch the curve $x = cos^2\theta$, $y = 2\sin\theta$. (5)

OR

(A) In usual notations prove that $r = \frac{pe}{1 \pm ecos\theta}$. (5)

(B) Sketch the polar curve $r = 3 + 3\cos\theta$. (5)

Q:5(A) Obtain Reduction formulae $I_n = \int sin^nx\ dx$ and $J_n = \int_0^{\pi/2} sin^n dx$,

Where $n \in N$. (6)

(B) Evaluate $\int tan^6x\ \ dx$. (4)

OR

(A) Show that the intrinsic equation of the curve $y^3 = ax^2$ is $27s = 8a(sec^3\Psi - 1)$. (6)

(B) Find the radius of curvature ρ for the polar curve $r = a(1 + \cos\theta)$. (4)

Q:6(A) State and prove Euler's Theorem for the homogeneous function $Z = f(x,y)$. (5)

(B) Verify Euler's theorem for the function $z = x^n \log_e(\frac{y}{x})$ and

Find $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. (5)

OR

(A) Find $\frac{dz}{dt}$ when $Z = sin^{-1}(x-y)$; $x = 3t$, $y = 4t^3$. Also verify by the direct substitution. (5)

(B) If $H = f(2x-3y, 3y-4z, 4z-2x)$, then prove that $\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial z} = 0$. (5)

Seat No: _______ No. of Printed Pages: 4

SARDAR PATEL UNIVERSITY

Bachelor of Science (Semester 1) Examination-2022

US01CMTH21: CALCULUS

Date: 10-12-2022, Saturday Total Marks: **70**

Time: 02:00 P. M. to 05:00 P. M.

નોંધ:(1) પ્રશ્નોની જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નોના ગુણભાર દર્શાવે છે.

(2) બધા પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

Q:1 નીચેના પ્રશ્નોના સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ આપો. (10)

(1) cosech x નો પ્રદેશ ______ છે.

(a) R (b) R - {0} (c) Z (d) N

(2) જો y = sin(ax+b) હોય તો y_n = __________.

(a) a^n sin(ax+b) (b) $a^n \sin(ax+n\frac{\pi}{2})$

(c) $a^n \sin(ax+b+n\frac{\pi}{2})$ (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x}$ નું સ્વરૂપ______ છે.

(a) $\frac{0}{0}$ (b) 1^{∞} (c) $\frac{\infty}{\infty}$ (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(4) વક્ર y = $x^3 - 3x^2 + 2x$ ને____ શાખાઓ (branches) છે.

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(5) જો e=1 હોય તો શાંકવ______ છે.

(a) અતિવલય (b) પરવલય (c) વર્તુળ (d) ઉપવલય

(6) ચક્રજ(cycloid) નું સમીકરણ_______ છે.

(a) x = a(θ-sinθ), y = a(1-cosθ) (b) x = a(1-sinθ), y = a(θ-cosθ)

(c) x = a(θ-sinθ) (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(7) $\int_0^{\pi/4} \tan^n x \; dx$ = ______, (n∈ N).

(a) $\frac{1}{n-1} - J_{n-2}$ (b) $\frac{1}{n+1} - J_{n-2}$ (c) $\frac{1}{n} - J_{n-2}$ (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(8) જો y=f(x) એ [a, b] પર વિકલનીય હોય તો વક્ર C પર આવેલા બે બિંદુઓ A અને B વચ્ચેના ચાપની લંબાઈ _______ છે, જ્યાં a અને b અનુક્રમે બિંદુઓ A અને B ના X-યામ છે.

(a) $\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dy$ (b) $\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$

(c) $\int_a^b \pi y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ (d) ઉપરના એકપણ નહિ

(9) સમપરિમાણિય વિધેય $f(x, y) = x^4y^4 - x^5y^3 + x^6y^2$ નું પરિમાણ _______ છે.

(a) 4 (b) 6 (c) 2 (d) 8

(10) જો u = $x^3 - 3xy^2$ હોય તો $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ = ______.

(a) 6y (b) -6x (c) -6y (d) ઉપરના એકપણ નહિ

Q:2 નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો. (કોઈપણ દસ) (20)

(1) વિધેય tanh x નું વિકલન મેળવો.

(2) જો y = $e^{2x} \cdot \sin 5x$ હોય તો y_4 મેળવો.

(P.T.O.)

(3) પરવલય $y^2 = 10x$ નું નાભિ (Focus) શોધો.

(4) વક્ર $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x}$ ની X-અક્ષ અને Y-અક્ષ વિશે સંમિતતા ચર્ચો..

(5) વક્ર $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ના પ્રાચલ સમીકરણો મેળવો.

(6) બિંદુ $(3, 40^0)$ નું અન્ય ત્રણ રીતે આલેખન કરો કે જેથી $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(7) સુરેખા $2x + 3y = 1$ ની વક્રતા શોધો.

(8) વક્ર $y = \cosh x$ ની (0, 1) થી (5, e) સુધીની ચાપ લંબાઈ શોધો.

(9) સંકલન $\int tan^3x\ sec^3x\ dx$ મેળવો.

(10) જો $\bar{r}(t) = (\cos t)\, i + (\sin t)\, j + t\, k$ હોય તો લક્ષ $\lim_{t\to\pi/4} \bar{r}(t)$ મેળવો.

(11) જેની નિયામિકા બિંદુ $(5, 0^0)$ માંથી પસાર થતી હોય તેવાશાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો, જ્યાં $e = 1$.

(12) સમપરિમાણિય વિધેય $f(x,y) = \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y}}{x^3 + y^3}$ નું પરિમાણ શોધો.

Q:3(A) લીબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. (5)

(B) જો $y=(x - \sqrt{4 + x^2}\,)^m$ હોય તો સાબિત કરો કે $(4+x^2)\, y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} + (n^2-m^2) y_n = 0$. (5)

OR

(A) $y = cosech^{-1}x$ નું વિકલન મેળવો. (5)

(B) લક્ષ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{tanx}{x}\right)^{\frac{5}{3x^2}}$ ની કિંમત શોધો. (5)

Q:4(A) વક્ર $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ નું આલેખન કરો. (5)

(B) વક્ર $x = cos^2\theta$, $y = 2\sin\theta$ નું આલેખન કરો. (5)

OR

(A) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે $r = \frac{pe}{1 \pm e\cos\theta}$. (5)

(B) ધ્રુવીય વક્ર $r = 3 + 3\cos\theta$ નું આલેખન કરો. (5)

Q:5(A) લઘુકરણ સૂત્રો $I_n = \int sin^n x\ dx$ અને $J_n = \int_0^{\pi/2} sin^n dx$ મેળવો, જ્યાં $n \in N$. (6)

(B) સંકલન $\int tan^6x\ dx$ મેળવો. (4)

OR

(A) સાબિત કરો કે વક્ર $y^3 = ax^2$ નું આંતરિક સમીકરણ $27s = 8a(sec^3\Psi - 1)$ છે. (6)

(B) ધ્રુવીય વક્ર $r = a\,(1 + \cos\theta)$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા ρ શોધો. (4)

Q:6(A) સમપરિમાણીય વિધેય $Z = f(x,y)$ માટે ઑયલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. (5)

(B) વિધેય $z = x^n \log_e\left(\frac{y}{x}\right)$ માટે ઑયલરનું પ્રમેય ચકાસો અને

$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ શોધો. (5)

OR

(A) $Z = sin^{-1}(x-y)$; $x = 3t$, $y = 4t^3$ માટે $\frac{dz}{dt}$ શોધો, વધુમાં $x = 3t$, $y = 4t^3$ વિધેય Z માં મૂકી

સીધું $\frac{dz}{dt}$ શોધી ચકાસો કે બંને સરખા છે. (5)

(B) જો $H = f(2x-3y,\ 3y-4z,\ 4z-2x)$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial z} = 0$. (5)